ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΑΙΓΑΙΟΥ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

ΠΤΥΧΙΑΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Ευκλείδεια Γεωμετρία σε περιβάλλον Geogebra
Σχεδιασμός Δραστηριοτήτων με βάση τη θεωρία των van Hiele

Αγγελική Β. Θρασυβούλου
Α.Μ. 2016047

Σάμος 2020

ΠΤΥΧΙΑΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Ευκλείδεια Γεωμετρία σε περιβάλλον Geogebra
Σχεδιασμός Δραστηριοτήτων με βάση
τη θεωρία των van Hiele

Αγγελική Β. Θρασυβούλου
Α.Μ. 2016047

Σάμος 2020

ΕΠΙΤΡΟΠΗ:

Κωνσταντίνα Ζορμπαλά (επιβλέπουσα καθηγήτρια)
Ανδρέας Παπασαλούρος
Αντώνης Τσολομύτης

Ημερομηνία παρουσίασης: 22.07.2020

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Η Γεωμετρία είναι αποδεδειγμένα ο κλάδος των Μαθηματικών, που εξαιτίας της φύσης του, δημιουργεί τα περισσότερα προβλήματα, κατανόησης για τους μαθητές και διδασκαλίας για τους εκπαιδευτικούς. Η δυσκολία των πρώτων, σχετίζεται με την επιλογή των κατάλληλων μεθόδων και τον εντοπισμό γεωμετρικών σχέσεων, τα οποία θα οδηγήσουν στην επίλυση των προβλημάτων. Οι δεύτεροι από την άλλη, αντιμετωπίζουν το πρόβλημα πως ο τρόπος διδασκαλίας περιορίζεται στη χρήση μόνο των εργαλείων «χαρτί και μολύβι». Η διδασκαλία της Ευκλείδειας Γεωμετρίας με τον τρόπο που γίνεται στα περισσότερα σχολεία, ενισχύει τη δυσκολία του μαθήματος, αφού δεν είναι ικανή να προσελκύσει το ενδιαφέρον του μαθητή έτσι ώστε να επικεντρωθεί στο μάθημα και να κατανοήσει το αντικειμένου που του διδάσκεται.

Στο μάθημα του Τμήματός μας, «Διδακτική της Ευκλείδειας Γεωμετρίας» που παρακολούθησα, ασχοληθήκαμε με τη θεωρία των van Hiele σχετικά με τα επίπεδα κατανόησης των μαθητών και το πώς η θεωρία αυτή μπορεί να πλαισιώσει τη διδασκαλία της Ευκλείδειας Γεωμετρίας στα σχολεία. Το μοντέλο των van Hiele με εντυπωσίασε και μου κίνησε το ενδιαφέρον ώστε να το μελετήσω σε βάθος. Στη συνέχεια παρακολουθώντας το μάθημα «Νέες Τεχνολογίες στην Εκπαίδευση», το οποίο επίσης διδάσκεται στο Τμήμα μας, γνώρισα τα περιβάλλοντα Δυναμικής Γεωμετρίας και ασχολήθηκα κυρίως με το περιβάλλον Geogebra. Το γεγονός ότι η Γεωμετρία μπορεί να παρουσιαστεί μέσω ενός υπολογιστή, ήταν κάτι το οποίο δεν μου είχε περάσει ποτέ από το μυαλό.

Και κάπως έτσι γεννήθηκε η ιδέα για τη συγκεκριμένη εργασία.

Ουσιαστικά, οι προβληματισμοί μου σχετικά με το μάθημα της Ευκλείδειας Γεωμετρίας και τις δυσκολίες που συναντούν οι μαθητές και οι εκπαιδευτικοί, σε συνδυασμό με τις γνώσεις που απέκτησα από τα μαθήματα του Τμήματός μας που ανέφερα παραπάνω, μου έδωσαν το ερέθισμα να ασχοληθώ πιο διεξοδικά με το πώς το μοντέλο van Hiele εφαρμόζεται στην πράξη αλλά και τον τρόπο με τον οποίο θα μπορούσαν οι νέες τεχνολογίες να αξιοποιηθούν στη διδασκαλία της Ευκλείδειας Γεωμετρίας, ώστε να γίνει το μάθημα πιο προσιτό, κατανοητό και ελκυστικό για τα παιδιά.

Καρλόβασι, Ιούνιος 2020

ΕΥΧΑΡΙΣΤΗΡΙΟ ΣΗΜΕΙΩΜΑ

Θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά όλα εκείνα τα άτομα που με στήριξαν στην προσπάθεια μου και με βοήθησαν, ο καθένας με τον τρόπο του, στην ολοκλήρωση των σπουδών μου και στη συγγραφή της συγκεκριμένης εργασίας. Η εργασία αυτή, στο μεγαλύτερο μέρος της, γράφτηκε κάτω από πολύ ιδιαίτερες συνθήκες, την περίοδο που όλα γίνονται υποχρεωτικά εξ αποστάσεως λόγω του ιού Covid-19 και η κοινωνία όπως και ο τρόπος ζωής έχει αλλάξει ριζικά.

Ιδιαίτερα, νιώθω την ανάγκη να ευχαριστήσω την επιβλέπουσα καθηγήτριά μου κ. Κωνσταντίνα Ζορμπαλά, της οποίας η συμβολή και η επιστημονική κατάρτιση έπαιξαν καθοριστικό ρόλο στην ολοκλήρωση της εργασίας αυτής. Η πολύπλευρη συμπαράστασή της, ο πολύτιμος χρόνος που μου διέθεσε, οι χρήσιμες υποδείξεις της και οι κατευθύνσεις που μου έδωσε ήταν η κινητήριος δύναμή μου στην προσπάθεια αυτή. Τέλος, θα ήθελα να την ευχαριστήσω για το θέμα που μου επέλεξε, καθώς μου έδωσε την ευκαιρία να εμβαθύνω στον τομέα της Δυναμικής Γεωμετρίας αλλά και να εμπλουτίσω τις γνώσεις μου σχετικά με τη θεωρία των van Hiele. Η εργασία αυτή αποτελεί για εμένα ένα πολύ σημαντικό εφόδιο για τη μετέπειτα σταδιοδρομία μου.

Ευχαριστώ επίσης τον κ. Ανδρέα Παπασαλούρο, ο οποίος με βοήθησε να μάθω το περιβάλλον Geogebra καθώς και να υλοποιήσω το μεγαλύτερο μέρος των δραστηριοτήτων που παρουσιάζονται στο τελευταίο κεφάλαιο της εργασίας αυτής. Η άμεση ανταπόκρισή του στις απορίες μου και ο πολύτιμος χρόνος που αφιέρωσε, ήταν καθοριστικά για την ολοκλήρωση της εργασίας.

Ακόμη, θα ήθελα να ευχαριστήσω τον κ. Αντώνιο Τσολομύτη, ο οποίος μας εξασφάλισε την άριστη εξ αποστάσεως επικοινωνία, την οποία απαιτούσαν οι ιδιαίτερες συνθήκες, αλλά και για τις πολύτιμες συμβουλές και τη βοήθεια που μου παρείχε καθ’ όλη τη διάρκεια των σπουδών μου.

Τέλος, ευχαριστώ την οικογένειά μου, της οποίας η αμέριστη συμπαράσταση και η ενθάρρυνση μου έδωσαν τη δυνατότητα να ολοκληρώσω τις προπτυχιακές μου σπουδές.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Η Ευκλείδεια Γεωμετρία είναι ένας κλάδος των Μαθηματικών που έχει γεννήσει αρκετούς προβληματισμούς, σχετικά με την αποτελεσματικότητα της διδασκαλίας του, περισσότερο από κάθε άλλο κλάδο. Με τον όρο Γεωμετρία, εννοούμε τη θεωρητική-αποδεικτική Γεωμετρία.

Η αξία της διδασκαλίας της Γεωμετρίας στη Δευτεροβάθμια εκπαίδευση είναι αδιαμφισβήτητη, καθώς στοχεύει στην ανάπτυξη της ικανότητας αντίληψης του χώρου και της διαισθητικής σύλληψης των αντικειμένων, οδηγώντας τους μαθητές στην άμεση σύνδεση των Μαθηματικών με τον πραγματικό κόσμο. Ακόμη, συμβάλλει στην κατανόηση αφηρημένων μαθηματικών εννοιών, μέσω της δημιουργίας γεωμετρικών μοντέλων ερμηνείας και αποτελεί ένα εξαιρετικό παράδειγμα μαθηματικού συστήματος. Στην πραγματικότητα είναι το πιο απλό και το πιο κατανοητό, για τους μαθητές, μαθηματικό σύστημα (Τουμάσης, 2000, 335).

Γενικότερα, οι στόχοι διδασκαλίας της Γεωμετρίας, όπως παρουσιάζονται από τον J. A. Van de Walle (Van de Walle, 2007, 517) μπορούν να συνοψιστούν στους εξής τέσσερις τίτλους: Σχήματα και Ιδιότητες, Τοποθεσία, Θέση και χώρος, Νοερή Απεικόνιση.

- **Σχήματα και Ιδιότητες**
  Περιέχει τη μελέτη των ιδιοτήτων των γεωμετρικών σχημάτων, τόσο των δισδιάστατων, όσο και των τρισδιάστατων, καθώς επίσης και τη μελέτη των σχέσεων που θεμελιώνονται σε ιδιότητες.
- **Τοποθεσία**
  Αφορά, κυρίως, τον συντονισμό της Γεωμετρίας ή άλλων τρόπων συγκεκριμενοποίησης του τρόπου με τον οποίο τοποθετούνται τα διάφορα αντικείμενα στον χώρο ή στο επίπεδο.
- **Θέση στο Χώρο**
  Σχετίζεται με τη μελέτη μεταφράσεων, αντανακλάσεων, περιστροφών και τη μελέτη της συμμετρίας.
- **Νοερή Απεικόνιση**
  Περιλαμβάνει την αναγνώριση γεωμετρικών σχημάτων στο φυσικό περιβάλλον, την ανάπτυξη σχέσεων μεταξύ δισδιάστατων και τρισδιάστατων αντικειμένων και από άλλες οπτικές γωνίες.

Η αξία αυτών των στόχων διδασκαλίας είναι πως, χάρις αυτούς, υπάρχει πλέον ένα πλαίσιο περιεχομένου, το οποίο ταξινομεί τις τάξεις με τέτοιον τρόπο, ώστε τόσο οι εκπαιδευτικοί όσο και οι ειδικοί που σχεδιάζουν τα προγράμματα σπουδών, να μπορούν να εξετάζουν την ανάπτυξη από χρόνο σε χρόνο. Σε αντίθεση όμως με την παιδαγωγική της αξία, η διδασκαλία της Γεωμετρίας στη Δευτεροβάθμια εκπαίδευση παρουσιάζει μεγάλα προβλήματα και δυσκολίες για τους εκπαιδευτικούς και τους μαθητές. Το μάθημα της Γεωμετρίας θεωρείται αναμφίβολα, αν όχι από όλους, από τους περισσότερους μαθητές, το πιο δύσκολο και απαιτητικό απ' όλα τα σχολικά μαθήματα (Τουμάσης, ό.π., 335).

Οι μαθητές, είναι δυνατόν να αντιμετωπίζουν αρκετές δυσκολίες γύρω από τη μάθηση και κατανόηση της Γεωμετρίας. Αυτές εντοπίζονται σε ένα ευρύ φάσμα: από την ορολογία και την ικανότητα αντίληψης του χώρου στην Πρωτοβάθμια εκπαίδευση, μέχρι την ανάπτυξη συλλογισμών και την κατασκευή αποδείξεων για γεωμετρικές προτάσεις στη Δευτεροβάθμια εκπαίδευση (ό.π., 340).

Συγκεκριμένα, η διδασκαλία της θεωρητικής-αποδεικτικής Ευκλείδειας Γεωμετρίας, παρουσιάζει τα κυριότερα προβλήματα της για τους εξής λόγους:[1]

1. Η συνθετική δομή βάσει της οποίας αναπτύσσεται το περιεχόμενό της, απαιτεί αυστηρότητα ως προς τη λογική ιεραρχία και διανοητική πειθαρχία, χαρακτηριστικά τα οποία γίνονται δύσκολα κατανοητά από τους μαθητές.
2. Η έννοια της απόδειξης, η οποία κατέχει πρωταγωνιστικό ρόλο στην ανάπτυξη του περιεχομένου και τη διδασκαλία της Γεωμετρίας στο Λύκειο, είναι η πηγή της πλειονότητας των δυσκολιών για την κατανόηση του περιεχομένου.
3. Ο συσσωρευτικός χαρακτήρας της δομής του περιεχομένου, απαιτεί από τον μαθητή να είναι ικανός να εφαρμόσει, οποιαδήποτε στιγμή του ζητηθεί, προηγούμενες γνώσεις που έχει αποκτήσει (αξιώματα, θεωρήματα, πορίσματα). Αυτή η ιδιαιτερότητα δεν συναντάται στα υπόλοιπα μαθήματα, στον βαθμό που το απαιτεί η Γεωμετρία.
4. Τα ελλειπή κίνητρα μάθησης, που οφείλονται στον διαχωρισμό του μαθήματος από τα υπόλοιπα Μαθηματικά, αλλά και η αποκοπή του περιεχομένου της Γεωμετρίας από άλλες δραστηριότητες του μαθητή.
5. Αρκετοί μαθητές, στην ηλικία των 14 ετών, δηλαδή στην ηλικία που τους διδάσκεται η θεωρητική Γεωμετρία, δεν έχουν αναπτύξει παραγωγικό τρόπο σκέψης. Συνήθως, στην ηλικία αυτή, οι μαθητές βρίσκονται στη φάση όπου η σκέψη τους είναι τελείως συνδεδεμένη με τις αντιλήψεις τους για τα συγκεκριμένα αντικείμενα και περνούν στη φάση των τυπικών-αφηρημένων ενεργημάτων, οπότε και αρχίζουν πλέον να σκέφτονται υποθετικά και παραγωγικά. Πολλοί, επίσης, δεν έχουν αποκτήσει τις απαιτούμενες δεξιότητες και κατάλληλη εννοιολογική κατανόηση, εφόδια που θα τους επέτρεπαν να κατανοήσουν και να εφαρμόσουν τυπικές-παραγωγικές αποδείξεις. Συνεπώς, οι μαθητές, κατά τη διάρκεια του σχολικού έτους, προσπαθούν να μιμηθούν τις αυστηρές αποδείξεις που τους

[1] Τουμάσης, ό.π., 356 f.

παρουσιάζουν οι δάσκαλοι και τελικά φτάνουν σε σημείο να μην έχουν σαφή αντίληψη της διαφοράς ανάμεσα σε αξιώματα, θεωρήματα και ορισμούς.

6. Η απουσία κανόνων ή αλγορίθμων, τους οποίους θα μπορούσε να ακολουθήσει ο μαθητής με σιγουριά, ώστε να φτάσει με ασφάλεια στη λύση ενός προβλήματος.

Κατά τη διάρκεια της δεκαετίας του 1980, αρκετές μελέτες αποκάλυψαν τη φύση των δυσκολιών αυτών, ενώ ορισμένες άλλες έχουν διερευνήσει τις πηγές τους.[2] Το συμπέρασμα που προκύπτει από αυτές είναι ότι, τελικά, η έννοια της απόδειξης προκαλεί στους μαθητές ανυπέρβλητες, πολλές φορές, δυσκολίες, οι οποίες ευθύνονται και για τα προβλήματα που αντιμετωπίζουν οι δάσκαλοι κατά τη διδασκαλία της Γεωμετρίας.

Η έννοια της απόδειξης δηλαδή, συνιστά τη μεγαλύτερη πρόκληση για τα σχολικά Μαθηματικά. Σε μια απόπειρα να διαπιστωθεί ο λόγος για τον οποίο οι περισσότεροι μαθητές δυσκολεύονται με την απόδειξη καθώς, επίσης, και με άλλες γνωστικές διαδικασίες υψηλότερου επιπέδου, οι οποίες βέβαια είναι απαραίτητες για να σημειωθεί επιτυχία στο μάθημα της Γεωμετρίας, προτάθηκε η θεωρία των επιπέδων van Hiele (ό.π., 343), η οποία παρουσιάζεται αναλυτικά στο 1ο Κεφάλαιο αυτής της εργασίας.

Η θεωρία van Hiele, αναπτύχθηκε από τους Ολλανδούς παιδαγωγούς Pierre Marie van Hiele και Dina van Hiele-Geldof και προσφέρει ένα λειτουργικό και αναγνωρισμένο τρόπο μελέτης της γεωμετρικής σκέψης των μαθητών. Συνίσταται από 5 επίπεδα κατανόησης (οπτική αντίληψη, ανάλυση, άτυπη σκέψη, τυπική σκέψη, αυστηρότητα) και περιγράφει τα χαρακτηριστικά της διαδικασίας ανάπτυξης της γεωμετρικής σκέψης των μαθητών. Το πρωτότυπο κείμενο των van Hiele, υιοθετεί την αρίθμηση από 0 έως 4 για τα επίπεδα σκέψης, αρίθμηση η οποία έχει αμφισβητηθεί από πολλούς και έχει επικρατήσει αντ' αυτής η αρίθμηση από 1 έως 5. Στην παρούσα εργασία, τα επίπεδα απαριθμούνται από το 1 μέχρι το 5.

Κατά την ανάπτυξη της γεωμετρικής σκέψης και την οικοδόμηση της έννοιας των γεωμετρικών σχημάτων, αλλά και για να είναι η μαθησιακή διαδικασία αποτελεσματική, θα πρέπει οι μαθητές να συμμετέχουν σε μαθησιακές εμπειρίες, οι οποίες θα τους εγείρουν το ενδιαφέρον. Σύμφωνα με τον Τουμάση, (ό.π., 340 ff) μελέτες ερευνητών έχουν δείξει ότι η χρήση των νέων τεχνολογιών στην εκπαιδευτική διαδικασία, έχει θετικό αντίκτυπο στην επίδοση των μαθητών. Η αξιοποίηση περιβαλλόντων Δυναμικής Γεωμετρίας (Μικροκόσμων) στη διδασκαλία και τη μάθηση, παρέχει καινούργιους τρόπους στους μαθητές να οικοδομήσουν την εννοιολογική σημασία των γεωμετρικών σχημάτων. Οι Μικρόκοσμοι και κυρίως τα δυναμικά περιβάλλοντα Γεωμετρίας, δίνουν στους μαθητές την ευκαιρία να πειραματιστούν και να ελέγξουν την εγκυρότητα των εικασιών τους. Ουσιαστικά

[2] Ενδεικτικά αναφέρουμε ορισμένες από αυτές που παρουσιάζει ο Τουμάσης (ό.π., 340 ff): Carpenter 1981, Robinson 1976, Vinner και Hershkowitz 1980, Williams 1989.

ενθαρρύνουν σε πολύ μεγάλο βαθμό την ανακαλυπτική μάθηση. Επιπλέον, παρέχουν τη δυνατότητα αναπαράστασης πολύπλοκων γεωμετρικών σχημάτων και απεικονίσεων, οι οποίες δεν θα μπορούσαν να σχεδιαστούν από τον δάσκαλο απλά με χαρτί και μολύβι.

Υπάρχουν διάφοροι τύποι περιβαλλόντων Δυναμικής Γεωμετρίας. Εμείς, θα ασχοληθούμε κυρίως με το περιβάλλον Geogebra. Το λογισμικό του συνδυάζει δυνατότητες τόσο από Άλγεβρα όσο και από Γεωμετρία και ο τρόπος λειτουργίας του είναι προσιτός ακόμη και για τους πιο αρχάριους μαθητές και δασκάλους.

Έτσι λοιπόν, η δομή της εργασίας έχει ως εξής:

Στο **Κεφάλαιο 1** παρουσιάζεται αναλυτικά το μοντέλο γεωμετρικής σκέψης της θεωρίας των van Hiele σχετικά με τις δυσκολίες των μαθητών τους στην κατανόηση του μαθήματος της Γεωμετρίας.

Ακολουθεί το **Κεφάλαιο 2**, στο οποίο παρουσιάζονται τα περιβάλλοντα Δυναμικής Γεωμετρίας. Γίνεται μια ιστορική αναδρομή στα πρώτα περιβάλλοντα, τα οποία αφορούσαν τόσο την Υπολογιστική Άλγεβρα όσο και τη Γεωμετρία, αλλά δεν «πάντρευαν» τους δύο αυτούς τομείς. Με άλλα λόγια, είχαν δημιουργηθεί διαφορετικά προγράμματα που αφορούσαν την Άλγεβρα και άλλα, ξεχωριστά, που αφορούσαν τη Γεωμετρία. Το 2001 όμως ο Hohenwarter, σχεδίασε το λογισμικό Geogebra, ένα περιβάλλον Δυναμικής Γεωμετρίας αλλά και Άλγεβρας ταυτόχρονα.

Στο **3^{o}** και τελευταίο **Κεφάλαιο** της εργασίας αυτής, παρουσιάζονται δραστηριότητες βασισμένες στη θεωρία των van Hiele, ταξινομημένες σύμφωνα με τα επίπεδα κατανόησης του μοντέλου. Καθεμιά από αυτές είναι σχεδιασμένη σε περιβάλλον Geogebra.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1ο

Η ΘΕΩΡΙΑ ΤΩΝ VAN HIELE

Στη σύγχρονη Διδακτική των Μαθηματικών, τα θεμελιώδη επιστημολογικά χαρακτηριστικά της Ευκλείδειας Γεωμετρίας, όπως η παραγωγική οργάνωση του περιεχομένου, η αποδεικτική διαδικασία και η έμφαση στις γεωμετρικές κατασκευές, αναφέρονται συνήθως ως «ανώτερα επίπεδα γεωμετρικής σκέψης» και η μάθησή τους έχει γίνει αντικείμενο συστηματικής μελέτης και έρευνας.

Το 1957, δύο Ολλανδοί ερευνητές, ο Pierre Marie van Hiele και η σύζυγός του Dina van Hiele-Geldof, σε παράλληλες διδακτορικές διατριβές στο πανεπιστήμιο Utrecht, ανέπτυξαν μια θεωρία για τα επίπεδα γεωμετρικής σκέψης, στην οποία έχει στηριχθεί η διεξαγωγή μεγάλου αριθμού ερευνών σε διάφορες χώρες και είναι γνωστή ως «Μοντέλο van Hiele».

Η θεωρία των van Hiele ταξινομεί τον τρόπο κατανόησης των γεωμετρικών εννοιών σε πέντε (5) ιεραρχημένα επίπεδα. Καθένα από αυτά περιγράφει τις συλλογιστικές διεργασίες που πραγματοποιούνται στο εσωτερικό του ανθρώπινου νου, κατά την εξέταση ή τη μελέτη γεωμετρικών αντικειμένων. Τα επίπεδα δεν περιγράφουν μόνο τις γνώσεις που κατέχει ένα άτομο σε κάθε επίπεδο, αλλά και τον τρόπο με τον οποίο σκέφτεται και τους τύπους των γεωμετρικών ιδεών που επεξεργάζεται νοητικά. Κάθε επίπεδο χαρακτηρίζεται από τα αντικείμενα της σκέψης και τα προϊόντα της σκέψης. Καθώς ένα άτομο περνάει από ένα επίπεδο σε ένα άλλο, τα αντικείμενα της γεωμετρικής σκέψης αλλάζουν (Van de Walle, 2007, 517).

1.1 Το μοντέλο των van Hiele

Η θεωρία που αναπτύχθηκε από τους van Hiele υποστηρίζει πως όλοι οι μαθητές περνούν μέσα από πέντε επίπεδα ανάπτυξης της γεωμετρικής τους σκέψης, βοηθούμενοι από κατάλληλες εκπαιδευτικές πρακτικές. Τα επίπεδα αυτά είναι διαδοχικά και δεν εξαρτώνται από την ηλικία και το στάδιο βιολογικής ανάπτυξης όπως υποστηρίζει η θεωρία του Piaget (Σακονίδης, κ.ά., 2017, 116).

Ο μαθητής για να μπορέσει να καταταχθεί σε ένα οποιοδήποτε επίπεδο, θα πρέπει να έχει κατακτήσει όλα τα προηγούμενα. Συγκεκριμένα, ένας μαθητής που έχει επιτύχει μόνο σε ένα συγκεκριμένο επίπεδο, δεν είναι σε θέση να καταλάβει τον τρόπο σκέψης του αμέσως επόμενου επιπέδου ή κάποιου υψηλότερου και αν περάσει σε κάποιο από αυτά θα μπορεί να λειτουργεί μόνο αλγοριθμικά (μηχανικά) (Mayberry, 1981, 58). Παρακάτω παρουσιάζονται αναλυτικά τα πέντε (5) διαδοχικά επίπεδα ανάπτυξης της γεωμετρικής σκέψης που αναφέραμε νωρίτερα:

1.1.1 Τα επίπεδα κατανόησης του μοντέλου

◦ Επίπεδο 1: Αναγνώριση ή Οπτικοποίηση

Στο επίπεδο αυτό, ο μαθητής αναγνωρίζει τα σχήματα από την εξωτερική τους εμφάνιση, σαν ολότητες. Οι ιδιότητες των σχημάτων δεν είναι αντιληπτές αλλά ο μαθητής μπορεί να αναγνωρίζει και να κατονομάζει τα σχήματα και να διακρίνει ένα δεδομένο σχήμα από τα υπόλοιπα που εμφανισιακά του μοιάζουν (ό.π., 59). Με λίγα λόγια οι μαθητές του επιπέδου αυτού αναγνωρίζουν και κατονομάζουν τα σχήματα βασιζόμενοι στα καθολικά οπτικά χαρακτηριστικά τους.

Τα παιδιά μπορούν επιπλέον να εκτελούν μετρήσεις και να συζητούν για τις ιδιότητες των σχημάτων, χωρίς όμως να επεξεργάζονται αυτές τις ιδιότητες με σαφήνεια. Το σχήμα καθορίζεται για το παιδί από την εμφάνισή του: ένα τετράγωνο είναι τετράγωνο «επειδή μοιάζει με τετράγωνο» ή ένα δεδομένο σχήμα είναι ορθογώνιο, επειδή «μοιάζει με πόρτα». Η μορφή παίζει καθοριστικό ρόλο και μπορεί να υπερισχύσει των ιδιοτήτων του σχήματος. Τα αντικείμενα της σκέψης είναι η μορφή των σχημάτων (με τι μοιάζουν) και τα προϊόντα της σκέψης είναι τάξεις ή ομάδες σχημάτων που φαίνονται να «μοιάζουν» (Van de Walle, ό.π., 517).

Συνοπτικά, στο επίπεδο αυτό, η γεωμετρική σκέψη των μαθητών τους επιτρέπει να:

1. κάνουν διάφορες μετρήσεις.
2. αναγνωρίζουν τα διάφορα σχήματα με βάση την εμπειρία και την εποπτεία, δημιουργώντας σχετικά οπτικά πρότυπα.
3. αντιλαμβάνονται τα σχήματα από τη συνολική μορφή τους, σαν μια ολότητα (gestalt), όχι όμως να διακρίνουν τα συστατικά μέρη των σχημάτων (π.χ. γωνίες, πλευρές).
4. κατονομάζουν σχήματα (π.χ. τρίγωνα, τετράγωνα, κύβοι) αλλά όχι να προσδιορίζουν και να διατυπώνουν τις γεωμετρικές ιδιότητες τους ή άλλα χαρακτηριστικά γνωρίσματα αυτών των σχημάτων.

◦ Επίπεδο 2: Περιγραφή ή Ανάλυση Ιδιοτήτων

Στο επίπεδο αυτό, ο μαθητής ανακαλύπτει τις ιδιότητες των σχημάτων. Κάθε ιδιότητα είναι απομονωμένη και δεν συσχετίζεται με κάποια από τις υπόλοιπες, μέχρι να εξεταστεί καθεμιά ξεχωριστά, ενώ σχέσεις μεταξύ διαφορετικών σχημάτων δεν γίνονται αντιληπτές. Ένας μαθητής στο επίπεδο αυτό είναι σε θέση να αναγνωρίζει και να κατονομάζει ιδιότητες γεωμετρικών σχημάτων (Mayberry, ό.π., 59).

Οι μαθητές και οι μαθήτριες εξετάζουν τα σχήματα μέσα σε μια ομάδα περισσότερο και όχι σαν μεμονωμένα σχήματα. Εστιάζοντας σε μία τάξη σχημάτων, μπορούν να αναρωτηθούν τι καθιστά ένα ορθογώνιο, ορθογώνιο και να επικεντρωθούν στα σημαντικά χαρακτηριστικά (τέσσερις πλευρές, απέναντι πλευρές παράλληλες, απέναντι πλευρές ίσες, τέσσερις ορθές γωνίες, ίσες διαγώνιοι, κ.λπ). Χαρακτηριστικά όπως ο προσανατολισμός ή το μέγεθος, που δεν επηρεάζουν το εάν είναι ορθογώνιο, έρχονται σε δευτερεύουσα θέση. Τα παιδιά αντιλαμβάνονται ότι διαφορετικά σχήματα κατατάσσονται στην ίδια ομάδα εξαιτίας των κοινών ιδιοτήτων τους. Έτσι, οι ιδιότητες για ένα συγκεκριμένο σχήμα μπορούν να γενικευτούν και να συμπεριλάβουν όλα τα σχήματα που ανήκουν στην ίδια ομάδα, π.χ. «Όλοι οι κύβοι έχουν έξι ίσες έδρες, και κάθε μία από αυτές είναι ένα τετράγωνο».

Οι μαθητές σε αυτό το επίπεδο μπορούν να καταγράψουν όλες τις ιδιότητες των τετραγώνων, των ορθογωνίων, των παραλληλογράμμων, αλλά μπορεί να μη διακρίνουν ότι όλα τα τετράγωνα είναι ορθογώνια και όλα τα ορθογώνια παραλληλόγραμμα, δηλαδή ότι η μια ιδιότητα είναι υποκατηγορία της άλλης. Οι ιδιότητες λοιπόν, συνδέονται με τα σχήματα αλλά δεν είναι διατεταγμένες ως συνέπεια η μία κάποιας άλλης (Van de Walle, ό.π., 517 f).

Στο επίπεδο αυτό, λοιπόν, γίνεται ανάλυση των γεωμετρικών μορφών και σχέσεων. Τα σχήματα είναι φορείς των ιδιοτήτων τους. Τα αντικείμενα της σκέψης είναι περισσότερο τάξεις σχημάτων παρά ξεχωριστά σχήματα ενώ τα προϊόντα της σκέψης είναι οι ιδιότητες των σχημάτων.

Συνοπτικά, οι μαθητές στο επίπεδο αυτό έχουν τις εξής ικανότητες γεωμετρικής σκέψης:

1. Είναι σε θέση να διακρίνουν συστατικά μέρη των διαφόρων σχημάτων και σχέσεις ανάμεσα στα συστατικά μέρη που χαρακτηρίζουν ολόκληρη την κλάση.
2. Κατονομάζουν ιδιότητες γεωμετρικών σχημάτων και τα αναγνωρίζουν μέσω των ιδιοτήτων αυτών. Όμως καμιά σύνδεση μεταξύ των ιδιοτήτων δεν παρατηρείται και οι σχέσεις μεταξύ διαφορετικών σχημάτων δεν γίνονται αντιληπτές.
3. Μπορούν να αναφέρουν άλλες ιδιότητες των σχημάτων (π.χ. «τα ορθογώνια έχουν ίσες διαγώνιες» ή «ένας ρόμβος έχει τις διαγώνιες κάθετες») αλλά δεν μπορούν να τα ορίσουν τυπικά ή να αποδείξουν τις ιδιότητες.
4. Δεν προσδιορίζουν σχέσεις ανάμεσα σε διαφορετικές ομάδες σχημάτων (π.χ. ότι «το τετράγωνο είναι ένας ρόμβος που έχει μια ορθή γωνία»).
5. Είναι σε θέση να διαπιστώσουν κοινές ιδιότητες ανάμεσα σε διαφορετικά σχήματα (π.χ. κοινά χαρακτηριστικά ορθογωνίου παραλληλογράμμου και τετραγώνου).
6. Έχουν αναπτύξει κατάλληλο λεξιλόγιο που τους βοηθά να περιγράψουν διάφορα σχήματα.

7. Δεν αισθάνονται την ανάγκη για λογικές αποδείξεις.

◦ Επίπεδο 3: Σύνδεση ή μη-τυπική Παραγωγή

Στο επίπεδο αυτό, οι ορισμοί παίζουν σημαντικό ρόλο. Οι συσχετισμοί μεταξύ των ιδιοτήτων των σχημάτων, λογικές συνεπαγωγές και κατηγοριοποιήσεις πρέπει να γίνονται αντιληπτές. Στο επίπεδο αυτό προβλέπεται ότι οι μαθητές μπορούν να αντιλαμβάνονται τις σχέσεις που υπάρχουν μέσα στο ίδιο σχήμα αλλά και τις σχέσεις που υπάρχουν μεταξύ των σχημάτων. Όμως, ο ρόλος και η σημασία της απαγωγής (δηλ. του παραγωγικού συλλογισμού) δεν είναι ακόμη κατανοητά (Mayberry, ό.π., 59).

Καθώς τα παιδιά αρχίζουν να προβληματίζονται πάνω στις ιδιότητες των σχημάτων, ως γεωμετρικών αντικειμένων, χωρίς τους περιορισμούς ενός συγκεκριμένου φυσικού αντικειμένου, αποκτούν την ικανότητα να διακρίνουν τις σχέσεις που υπάρχουν μεταξύ δύο ιδιοτήτων, αλλά και ανάμεσα σε όλες αυτές τις ιδιότητες, π.χ. «Αν ένα σχήμα είναι τετράγωνο, θα πρέπει να είναι και ορθογώνιο», (Van de Walle, ό.π., 520).

Σταδιακά, καθώς ωριμάζει η γεωμετρική σκέψη των μαθητών και αποκτούν ικανότητα συλλογισμού πάνω στις ιδιότητες της μορφής «εάν-τότε», μπορούν να ταξινομήσουν τα σχήματα χρησιμοποιώντας λιγότερες ιδιότητες ή και μόνο τις απολύτως αναγκαίες. Για παράδειγμα, ένα σχήμα με τέσσερις ίσες πλευρές και (τουλάχιστον) μία ορθή γωνία, είναι τετράγωνο. Ένα παραλληλόγραμμο με μία ορθή γωνία είναι ορθογώνιο.

Από την παρατήρηση των ιδιοτήτων, ο μαθητής περνάει σε λογικά επιχειρήματα σχετικά με τις ιδιότητες. Μπορεί να παρακολουθήσει και να αντιληφθεί τη σημασία ενός μη τυπικού συμπερασματικού επιχειρήματος για τα σχήματα και τις ιδιότητές τους. Αν και οι αποδείξεις είναι περισσότερο διαισθητικές, σε αυτό το επίπεδο το άτομο αρχίζει να εκτιμά τη σημασία των λογικών επιχειρημάτων. Η έννοια της αξιωματικής δομής ενός τυπικού συμπερασματικού συστήματος δεν είναι κατανοητή (ό.π., 520).

Ουσιαστικά, στο επίπεδο αυτό γίνεται μια αρχή του παραγωγικού τρόπου σκέψης και των μαθηματικών συλλογισμών. Οι ιδιότητες διατάσσονται ως εξής: κάποιες προκύπτουν από άλλες. Τα αντικείμενα της σκέψης είναι οι ιδιότητες των σχημάτων και τα προϊόντα της σκέψης είναι σχέσεις ανάμεσα στις ιδιότητες των γεωμετρικών αντικειμένων.

Συνοπτικά, χάρις τις ικανότητες της γεωμετρικής τους σκέψης, οι μαθητές στο επίπεδο αυτό:

1. Μπορούν να εξηγήσουν λογικά πως η ύπαρξη της ιδιότητας Α συνεπάγεται την ιδιότητα Β (π.χ. «Αν και οι 4 γωνίες είναι ορθές, τότε το σχήμα είναι ορθογώνιο»).
2. Αντιλαμβάνονται π.χ. ότι ένα τετράγωνο είναι ειδική περίπτωση ορθογωνίου παραλληλογράμμου.
3. Είναι σε θέση να διατυπώνουν αφηρημένους ορισμούς και να κατανοούν την ανάγκη της χρήσης τους και το ρόλο τους.
4. Είναι σε θέση να κατανοήσουν την έννοια της ικανής και αναγκαίας συνθήκης.
5. Έχουν την ικανότητα να παρακολουθήσουν λογικές αποδείξεις, αλλά δεν μπορούν να κατανοήσουν ή να συνθέσουν πλήρεις αποδείξεις των ισχυρισμών τους.
6. Συνδέουν τα σχήματα με βάση τις ιδιότητές τους και τα ταξινομούν σε κατηγορίες (π.χ. «κάθε τετράγωνο είναι ορθογώνιο»). Χρησιμοποιούν στοιχειώδη λογικά επιχειρήματα και κάνουν απλούς παραγωγικούς συλλογισμούς, ωστόσο ο ρόλος και η σημασία τους δεν είναι ακόμα κατανοητά.

◦ Επίπεδο 4: Απόδειξη ή τυπική Παραγωγή

Στο επίπεδο αυτό, οι μαθητές έχουν την ικανότητα να κατασκευάσουν αποδείξεις, να καταλάβουν το ρόλο των αξιωμάτων και των ορισμών και να αντιλαμβάνονται τη σημασία των αναγκαίων και ικανών συνθηκών. Ο παραγωγικός συλλογισμός παίζει πολύ σημαντικό ρόλο και ένας μαθητής σ' αυτό το επίπεδο πρέπει να είναι σε θέση να δώσει μόνος του τα βασικά βήματα μιας απόδειξης (Mayberry, ό.π., 59).

Οι μαθητές που ανήκουν στο επίπεδο αυτό, έχουν την ικανότητα να εξετάσουν και άλλα πράγματα πέρα από τις ιδιότητες των γεωμετρικών σχημάτων. Η συλλογιστική σκέψη που ανέπτυξαν στο προηγούμενο επίπεδο, έχει οδηγήσει σε ορισμένες εικασίες για τις σχέσεις μεταξύ των ιδιοτήτων. Η ανάγκη να ελέγξουν την ορθότητα, την εγκυρότητα των υποθέσεων αυτών και των άτυπων επιχειρημάτων που έχουν διατυπώσει προηγουμένως, οδηγεί στο να κατανοήσουν οι μαθητές την αναγκαιότητα της παραγωγικής σκέψης για την εδραίωση της γεωμετρικής αλήθειας. Αντιλαμβάνονται πως η δημιουργία ενός συστήματος λογικής, το οποίο στηρίζεται σε ελάχιστες υποθέσεις, είναι υψίστης σημασίας ώστε να μπορούν, μέσα από αυτό, να προέλθουν κι άλλες γεωμετρικές αλήθειες. Έτσι εντάσσουν τη γεωμετρική θεωρία σε ένα εξ ολοκλήρου δομημένο σύστημα με αξιώματα, ορισμούς, θεωρήματα και πορίσματα.

Στο επίπεδο αυτό, οι μαθητές, μπορούν να εργάζονται με αφηρημένες προτάσεις για τις γεωμετρικές ιδιότητες και να βγάζουν συμπεράσματα βασισμένα περισσότερο στη λογική παρά στη διαίσθηση. Διακρίνουν ιδιότητες, όπως ότι οι διαγώνιοι ενός παραλληλογράμμου διχοτομούνται, αλλά δεν αρκούνται στην παρατήρηση ή τη μη τυπική εξήγηση, αντιθέτως εκτιμούν ότι χρειάζεται να το αποδείξουν με μία σειρά λογικών επιχειρημάτων (Van de Walle, ό.π., 520 f).

Επομένως, στο επίπεδο αυτό οι μαθητές είναι σε θέση πλέον να αναπτύξουν γεωμετρικούς συλλογισμούς, παραγωγική σκέψη και αντιλαμβάνονται το νόημα της συνεπαγωγής. Τα αντικείμενα της σκέψης είναι σχέσεις ανάμεσα στις ιδιότητες των γεωμετρικών σχημάτων και τα προϊόντα της σκέψης είναι παραγωγικά αξιωματικά συστήματα για τη Γεωμετρία.

Συνοπτικά, στο επίπεδο αυτό οι μαθητές:

1. μπορούν να αναγνωρίζουν τη διαφορά ανάμεσα σε μη οριζόμενες έννοιες, ορισμούς, αξιώματα και θεωρήματα.
2. κατανοούν την ανάγκη χρήσης αξιωμάτων.
3. μπορούν να ανακαλύπτουν σχέσεις μεταξύ θεωρημάτων και να κάνουν γενικεύσεις.
4. γνωρίζουν τη σημασία και κάνουν διάκριση μεταξύ ικανής και αναγκαίας συνθήκης.
5. χρησιμοποιούν την εις άτοπον απαγωγή.
6. μπορούν να κάνουν μόνοι τους ολοκληρωμένες αποδείξεις, να κατανοούν και να παράγουν τα βασικά βήματα μιας απόδειξης ενός θεωρήματος και όλα αυτά στα πλαίσια ενός αξιωματικού συστήματος.
7. δεν αναγνωρίζουν την ανάγκη για αυστηρότητα στην απόδειξη και δεν κατανοούν τις σχέσεις μεταξύ διαφόρων αξιωματικών συστημάτων.

Στο Λύκειο, στην Ελλάδα, η μελέτη της Γεωμετρίας ξεκινάει από αυτό το επίπεδο.

◦ Επίπεδο 5: Αυστηρότητα ή Αξιωματικοποίηση

Στο επίπεδο αυτό, ο μαθητής πρέπει να έχει κατανοήσει τις τυπικές όψεις της παραγωγικής σκέψης. Τα σύμβολα χωρίς αναφορές μπορούν να τα χειριστούν σύμφωνα με τους κανόνες της τυπικής λογικής. Ένας μαθητής σ’ αυτό το επίπεδο, πρέπει να κατανοεί τον ρόλο και την αναγκαιότητα της απόδειξης με εις άτοπον απαγωγή καθώς και να συγκρίνει διαφορετικά αξιωματικά συστήματα (Mayberry, ό.π., 59).

Με άλλα λόγια, στο επίπεδο αυτό, το επίκεντρο της προσοχής είναι τα ίδια τα αξιωματικά συστήματα, και όχι η παραγωγή συμπερασμάτων μέσα σε ένα σύστημα. Εξετάζονται οι διακρίσεις και οι σχέσεις ανάμεσα στα διάφορα αξιωματικά συστήματα (Van de Walle, ό.π., 521).

Συνοπτικά, τα χαρακτηριστικά / οι ικανότητες της γεωμετρικής σκέψης των μαθητών στο επίπεδο αυτό είναι να:

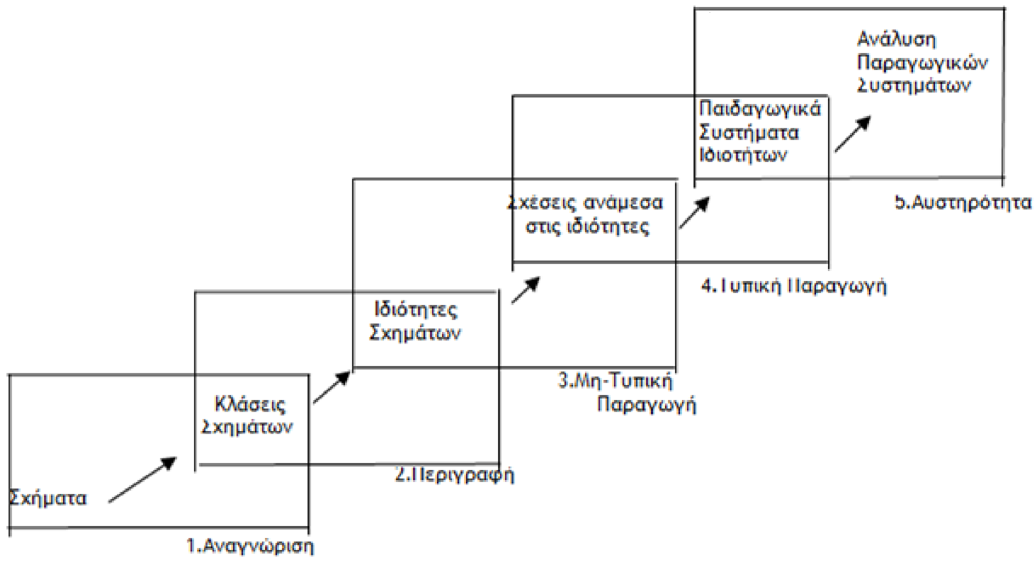
1. κατανοούν αρχές όπως η συνέπεια, η ανεξαρτησία και η πληρότητα των αξιωμάτων, ανάμεσα στα διάφορα αξιωματικά συστήματα.
2. αντιλαμβάνονται τη σημασία οικοδόμησης ενός αξιωματικού μαθηματικού συστήματος και τις σχέσεις ανάμεσα σε διαφορετικά συστήματα (π.χ. αναγνωρίζει ότι η Ευκλείδεια Γεωμετρία δεν είναι ο μοναδικός τρόπος

περιγραφής ενός αφηρημένου μαθηματικού σύμπαντος, αλλά υπάρχουν κι άλλοι όπως οι μη Ευκλείδειες Γεωμετρίες).

3. κατανοούν το ρόλο και την αναγκαιότητα της απόδειξης με τη μέθοδο της «εις άτοπον απαγωγή».

Γενικά λοιπόν, από την περιγραφή των van Hiele για τα επίπεδα ανάπτυξης της νοητικής σκέψης, ο μαθητής θα πρέπει να είναι σε θέση να πραγματοποιήσει μια σειρά εργασιών που αντιπροσωπεύουν τη σκέψη σε κάθε επίπεδο. Αν τα επίπεδα αυτά σχηματίζουν μια ιεραρχία τότε ένας μαθητής που πραγματοποιεί κάποιες εργασίες σε ένα συγκεκριμένο επίπεδο αλλά όχι στο αμέσως επόμενο, αναμένεται ότι θα μπορεί να πραγματοποιήσει δραστηριότητες σε όλα τα χαμηλότερα επίπεδα αλλά σε κανένα από τα υψηλότερα (Mayberry, ό.π., 58).

Από όσα αναφέραμε παραπάνω, γίνεται αντιληπτό πως τα προϊόντα σκέψης σε κάθε επίπεδο, ταυτίζονται με τα αντικείμενα της σκέψης του επόμενου επιπέδου. Αυτή η σχέση αντικείμενο-προϊόν σκέψης μεταξύ των επιπέδων της θεωρίας των van Hiele, φαίνεται στο σχήμα που παραθέτουμε παρακάτω (Van de Walle, ό.π., 521 f).



Σχήμα 1. Η Θεωρία Γεωμετρικής Σκέψης των van Hiele: Σε κάθε επίπεδο γεωμετρικής σκέψης, οι ιδέες που δημιουργούνται γίνονται το αντικείμενο σκέψης στο επόμενο επίπεδο (J.A.Van de Walle, 2007, 521)

1.1.1.1 Ιδιότητες του μοντέλου van Hiele

Πέρα από τα ειδικότερα γνωρίσματα του κάθε επιπέδου γεωμετρικής σκέψης, οι van Hiele διατύπωσαν και κάποιες γενικότερες ιδιότητες οι οποίες χαρακτηρίζουν το μοντέλο τους (Τουμάσης, ό.π., 351). Οι ιδιότητες αυτές παρουσιάζονται αναλυτικά παρακάτω:

1) Διαδοχικότητα

Οι μαθητές, για να φτάσουν σε ένα οποιοδήποτε επίπεδο πάνω από το πρώτο, πρέπει να περάσουν από όλα τα προηγούμενα επίπεδα. Δηλαδή, ένας μαθητής δεν μπορεί να βρίσκεται σε κάποιο van Hiele επίπεδο ν δίχως να έχει διέλθει από το επίπεδο ν-1. Η διέλευση από ένα επίπεδο σημαίνει ότι κάποιος έχει αναπτύξει κατάλληλη γεωμετρική σκέψη και έχει την εμπειρία που απαιτείται για το επόμενο επίπεδο (Van de Walle, ό.π., 522).

2) Πρόοδος

Η πρόοδος και ο βαθμός ανάπτυξης της γεωμετρικής σκέψης από επίπεδο σε επίπεδο, εξαρτώνται περισσότερο από το περιεχόμενο και τις μεθόδους διδασκαλίας, παρά από την ηλικία, με την έννοια των σταδίων ανάπτυξης της θεωρίας του Piaget. Η γεωμετρική εμπειρία είναι ο καθοριστικός παράγοντας που επηρεάζει την πρόοδο από το ένα επίπεδο στο άλλο, μέσα από δραστηριότητες που ενθαρρύνουν τους μαθητές να εξερευνήσουν, να συζητήσουν μεταξύ τους και να αλληλεπιδράσουν με το περιεχόμενο του επόμενου επιπέδου. Έτσι εμπλουτίζονται οι εμπειρίες των μαθητών στο τρέχον επίπεδό τους και υπάρχουν μεγαλύτερες πιθανότητες βελτίωσης του επιπέδου σκέψης τους (Van de Walle, ό.π., 522).

3) Εσωτερικό και Εξωτερικό

Τα ενυπάρχοντα αντικείμενα και τα συστατικά τους σε ένα επίπεδο, γίνονται αντικείμενα μελέτης στο επόμενο επίπεδο. Για παράδειγμα, στο πρώτο επίπεδο τα σχήματα γίνονται αντιληπτά μόνο από τη μορφή τους. Φυσικά το σχήμα γίνεται αντιληπτό από τις ιδιότητές του αλλά αυτό γίνεται φανερό στο δεύτερο επίπεδο, όπου το σχήμα αναλύεται και ανακαλύπτονται τα συστατικά και οι ιδιότητες τους (Τουμάσης, ό.π., 351 f).

4) Γλώσσα

Κάθε επίπεδο περιέχει τα δικά του γλωσσικά σύμβολα και δικό του δίκτυο σχέσεων που συνδέουν τα σύμβολα αυτά. Μια σχέση η οποία είναι σωστή σε ένα επίπεδο, μπορεί να τροποποιηθεί σε ένα άλλο επίπεδο. Για παράδειγμα, ένα σχήμα μπορεί να έχει περισσότερα από ένα ονόματα (ένα τετράγωνο είναι επίσης ορθογώνιο και παραλληλόγραμμο) (ό.π., 352).

5) Αντιστοιχία

Δύο άτομα που σκέφτονται σε διαφορετικά επίπεδα δεν μπορούν να αλληλοκατανοηθούν. Αν ο μαθητής βρίσκεται σε ένα συγκεκριμένο επίπεδο γεωμετρικής σκέψης, αλλά η διδασκαλία γίνεται σε κάποιο ανώτερο επίπεδο τότε, σύμφωνα και με τη θεωρία της ΖΕΑ (Ζώνη Επικείμενης Ανάπτυξης) του Lev Vygotsky, δεν θα επιτευχθούν η επιθυμητή μάθηση και η πρόοδος. Συγκεκριμένα, εάν ο δάσκαλος, τα διδακτικά υλικά, το περιεχόμενο της διδασκαλίας ή η ορολογία που χρησιμοποιείται βρίσκονται σε επίπεδο ανώτερο από εκείνο του μαθητή, ο τελευταίος δεν θα μπορεί να παρακολουθήσει τη διδασκαλία και τις τεχνικές σκέψης που χρησιμοποιούνται σ’ αυτή (ό.π.).

Όταν τα παιδιά καλούνται να αντιμετωπίσουν αντικείμενα της σκέψης τους, τα οποία όμως δεν έχουν δομηθεί σε προηγούμενο επίπεδο, το αποτέλεσμα είναι η έλλειψη επικοινωνίας και η απλή αποστήθιση κανόνων που δεν έχουν δομηθεί και κατανοηθεί ορθά, προσφέροντας στο μαθητή προσωρινή και επιφανειακή επιτυχία (Van de Walle, ό.π., 522).

Με λίγα λόγια, εάν ένας μαθητής βρίσκεται σε κάποιο επίπεδο γεωμετρικής σκέψης και η διδασκαλία γίνεται σε ένα διαφορετικό επίπεδο, τότε η επιθυμητή μάθηση και πρόοδος είναι αδύνατο να επέλθουν.

1.1.1.2 Προσδιορισμός του επιπέδου των μαθητών[3]

Για τον προσδιορισμό του επιπέδου σκέψης των μαθητών έχουν διεξαχθεί αρκετές έρευνες.[2] Παρακάτω, παρουσιάζονται λίγο πιο αναλυτικά οι περισσότερο αναγνωρισμένες, στο είδος τους, έρευνες:

Στην έρευνά του, ο Usiskin, όπως αναφέρει ο Σακονίδης, χρησιμοποίησε ένα τεστ για την εξακρίβωση των επιπέδων van Hiele, το οποίο αποτελείται από 25 ερωτήματα (5 ερωτήματα για καθένα από τα 5 επίπεδα). Συμπέρανε μεταξύ άλλων, ότι το επίπεδο 5 δεν υπάρχει ή δεν είναι ελέγξιμο, ενώ όλα τα άλλα επίπεδα είναι ελέγξιμα. Ακόμη, οι Gutierrez, Jaime και Fortuny παρουσίασαν έναν εναλλακτικό τρόπο προσδιορισμού των επιπέδων van Hiele, ειδικά για μαθητές που βρίσκονται μεταξύ δύο επιπέδων. Η μέθοδος αξιολόγησης που υιοθέτησαν στόχευε στο να μετρήσει τον βαθμό απόκτησης ενός επιπέδου από τους μαθητές, τόσο ως προς την ποσότητα, όσο και ως προς την ποιότητα.

Εάν ένας μαθητής δεν είχε καμία επίγνωση ή αδυνατούσε να ενταχθεί σε κάποιο επίπεδο, τοποθετούνταν στην βαθμίδα «καμία απόκτηση». Μαθητές με «χαμηλή απόκτηση», θεωρήθηκε ότι άρχιζαν να προσπαθούν να λειτουργήσουν σε ένα συγκεκριμένο επίπεδο, όμως δεν τα κατάφερναν και προσέφευγαν σε χαμηλότερο επίπεδο. Στην «ενδιάμεση απόκτηση» ενός επιπέδου τοποθετήθηκαν μαθητές που λειτουργούσαν με άνεση στο επίπεδό τους αλλά, όταν αντιμετώπιζαν κάποια δυσκολία, παλινδρομούσαν στο χαμηλότερο επίπεδο. Η «υψηλή απόκτηση» ενός επιπέδου αφορούσε έναν μαθητή, του οποίου το επίπεδο σκέψης ταίριαζε μεν στις προδιαγραφές και τα χαρακτηριστικά του επιπέδου στο οποίο βρισκόταν, αλλά ήταν επιρρεπής σε λάθη. Τέλος, στην κατηγορία «πλήρης απόκτηση» ενός επιπέδου κατατάχθηκαν μαθητές που κατανοούσαν πλήρως όσα απαιτούσε το επίπεδο και λειτουργούσαν με άνεση σε αυτό.

[3] Σακονίδης, 2017, 117 f.

Αντίστοιχες έρευνες έχουν διεξαχθεί και στην Ελλάδα. Ενδεικτικά αναφέρουμε μερικές που παρουσιάζει και ο Σακονίδης όπως, του Τζίφα όπου χρησιμοποιήθηκε το van Hiele Geometry Test του Usiskin, των Δημάκου και Νικολουδάκη, του Σαλονικιού με βάση το μοντέλο των Gutierrez, Jaime και Fortuny και του Ζάχου.

1.1.1.3 Εφαρμογές στη Διδασκαλία

Η θεωρία των van Hiele προσφέρει ένα πλαίσιο μέσα στο οποίο μπορούν να διεξάγονται γεωμετρικές δραστηριότητες, χωρίς να καθορίζει το περιεχόμενό τους. Μία δραστηριότητα σχεδιάζεται με αναφορά σε ένα συγκεκριμένο επίπεδο, αλλά πρέπει να έχει την ευελιξία να προσαρμοστεί στο επίπεδο σκέψης των μαθητών και των μαθητριών της τάξης, μέσω των ερωτήσεων ή της καθοδήγησης που παρέχει ο δάσκαλος. Ο τελευταίος, πρέπει να εστιάζει στις αντιδράσεις και τις παρατηρήσεις των παιδιών οι οποίες υποδηλώνουν ένα κατώτερο επίπεδο γεωμετρικής σκέψης, να τα ενθαρρύνει και να τα προκαλεί να λειτουργήσουν στο επόμενο επίπεδο. Στόχος των μαθημάτων της Γεωμετρίας στο Νηπιαγωγείο και το Δημοτικό σχολείο είναι η προαγωγή του επιπέδου γεωμετρικής σκέψης των μαθητών και των μαθητριών από το επίπεδο 1 στο επίπεδο 2 ή 3.

Οι δραστηριότητες του επιπέδου 1, επικεντρώνονται στα σχήματα που μπορούν να παρατηρήσουν οι μαθητές, να κατανοήσουν, να χωρίσουν και να αντιληφθούν με πολλούς τρόπους. Γενικότερος στόχος είναι η διερεύνηση του τρόπου με τον οποίο ανάμεσα στα διάφορα σχήματα εμφανίζονται ομοιότητες και διαφορές καθώς και η αξιοποίηση αυτών των ιδεών για την ομαδοποίηση των σχημάτων. Κάποιες από τις ομάδες των σχημάτων έχουν ονόματα, όπως ορθογώνια, τρίγωνα, κύλινδροι κ.α. Ιδιότητες των σχημάτων, όπως παράλληλες πλευρές, συμμετρία, ορθές γωνίες κ.α., εισάγονται μέσω των διαφόρων δραστηριοτήτων σε αυτό το επίπεδο αλλά μόνο με έναν άτυπο τρόπο μέσω της παρατήρησης (Van de Walle, ό.π., 517).

Μια σημαντική διαφορά ανάμεσα στις δραστηριότητες των επιπέδων 1 και 2 είναι πως στο επίπεδο 2 έχει αλλάξει το αντικείμενο της μαθητικής σκέψης. Παρόλο που οι μαθητές στο επίπεδο 2 εξακολουθούν (όπως και στο επίπεδο 1) να χρησιμοποιούν μοντέλα και σχέδια σχημάτων, τώρα αρχίζουν να τα βλέπουν ως εκπροσώπους των τάξεων των σχημάτων. Μέσα από κατάλληλα σχεδιασμένες δραστηριότητες, η κατανόησή τους για τις ιδιότητες των σχημάτων, όπως η συμμετρία, οι κάθετες και οι παράλληλες γραμμές κ.α., συνεχίζει να βελτιώνεται. Σε δραστηριότητες λοιπόν του επιπέδου 2, μπορεί να ζητηθεί από τους μαθητές να ανακαλέσουν όσο το δυνατόν περισσότερες ιδιότητες ενός σχήματος μπορούν. Τις ιδιότητες αυτές θα τις έχουν μάθει σε προηγούμενες δραστηριότητες, πιθανότατα αυτές του επιπέδου 1 (ό.π., 519).

Όσον αφορά τις δραστηριότητες του επιπέδου 3, βασικό χαρακτηριστικό τους είναι ότι περιλαμβάνουν άτυπες λογικές αιτιολογήσεις. Τα παιδιά έχουν κατανοήσει τις διάφορες ιδιότητες των σχημάτων. Ο δάσκαλος, μέσα από τις δραστηριότητες που σχεδιάζει, πρέπει να ενθαρρύνει τους μαθητές να κάνουν εικασίες και να διατυπώνουν ερωτήσεις όπως: «Γιατί;» ή «Τι θα γινόταν αν;» (ό.π., 520).

Στόχος λοιπόν των δραστηριοτήτων για τα 3 πρώτα επίπεδα πρέπει να είναι η βελτίωση της αίσθησης του χώρου μέσω της κατανόησης και της αναγνώρισης των σχημάτων, η απόκτηση δυνατότητας περιγραφής του χώρου από την ταξινόμηση και τη γνώση των ονομάτων των σχημάτων, η κατανόηση των εννοιών της ισότητας και της ομοιότητας, και η εξοικείωση με τις μονάδες μέτρησης και τη διαδικασία μέτρησης ή υπολογισμού διαφόρων γεωμετρικών αντικειμένων (μήκη, γωνίες, εμβαδά, όγκοι). Όλα αυτά δεν αντιμετωπίζονται ως «πράγματα που πρέπει να μάθουμε» αλλά ως τρόποι γνώσης και κατανόησης του γεωμετρικού κόσμου.

Ενώ η διδασκαλία της Γεωμετρίας στο Δημοτικό αφορά τη μη-τυπική Γεωμετρία, δηλαδή την αντίληψη των γεωμετρικών σχημάτων με βάση τις αισθήσεις και την εμπειρία, στο Γυμνάσιο οι μαθητές αρχίζουν να προσεγγίζουν τις γεωμετρικές έννοιες σε πιο αφηρημένο επίπεδο. Οδηγούνται μεν σε θεωρήματα αλλά μέσω της γενίκευσης συγκεκριμένων παραδειγμάτων και όχι ως απόρροια μιας συγκεκριμένης αποδεικτικής διαδικασίας (Σακονίδης, ό.π., 114).

Τίθενται τα εξής ερωτήματα:[4]

1) Ποια χαρακτηριστικά διέπουν τη γεωμετρική σκέψη των μαθητών του Δημοτικού Σχολείου και του Γυμνασίου;
2) Πως κατανέμονται οι μαθητές του δείγματος του Δημοτικού Σχολείου και του Γυμνασίου στα επίπεδα van Hiele;

Τα αποτελέσματα της έρευνας αυτής έδωσαν τις εξής απαντήσεις στα παραπάνω ερωτήματα:

Σχετικά με το πρώτο ερευνητικό ερώτημα, τα κύρια χαρακτηριστικά της γεωμετρικής σκέψης των τελειόφοιτων μαθητών του Δημοτικού Σχολείου και του Γυμνασίου είναι ότι οι μαθητές:

- αναγνωρίζουν με ευχέρεια τα επίπεδα γεωμετρικά σχήματα (Επίπεδο 1).
- διακρίνουν (κυρίως οι μαθητές του Γυμνασίου) τα σχήματα με βάση τις ιδιότητες τους (Επίπεδο 2).
- παρουσιάζουν αδυναμίες στις λεκτικές και σχεδιαστικές τους ικανότητες.
- εκδηλώνουν μεγαλύτερη δυσκολία στην κατανόηση των σχέσεων μεταξύ των σχημάτων.

Αναφορικά με το δεύτερο ερευνητικό ερώτημα, από την έρευνα προκύπτει, και ουσιαστικά επιβεβαιώνεται, η άποψη πως η πλειοψηφία των τελειόφοιτων μαθητών του Δημοτικού Σχολείου και του Γυμνασίου κατατάσσονται στο πρώτο και δεύτερο Επίπεδο van Hiele. Ωστόσο, οι επιδόσεις των μαθητών του Γυμνασίου είναι κατά ένα μικρό βαθμό υψηλότερες. Συγκεκριμένα, μεγαλύτερο ποσοστό των μαθητών του

[4] Σακονίδης, ό.π., 118 ff.

Γυμνασίου, σε σχέση με αυτό του Δημοτικού Σχολείου, τοποθετούνται στο δεύτερο επίπεδο γεωμετρικής σκέψης κατά van Hiele. Επίσης κανένας μαθητής της πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης δεν κατατάσσεται στο τρίτο Επίπεδο, ενώ αυτό συμβαίνει για ένα μικρό ποσοστό των μαθητών του Γυμνασίου.

Στο επίπεδο 4, ο τύπος αιτιολόγησης που χαρακτηρίζει τους μαθητές είναι ο ίδιος που απαιτείται και σε μια τυπική τάξη Γεωμετρίας στο Λύκειο. Εκεί τα παιδιά στηρίζονται σε ένα σύνολο αξιωμάτων και ορισμών για να κατασκευάσουν θεωρήματα. Επίσης αποδεικνύουν θεωρήματα, χρησιμοποιώντας ξεκάθαρες εκφράσεις λογικής αιτιολόγησης, ενώ η αιτιολόγηση του Επιπέδου 3, μπορεί να είναι αρκετά άτυπη. Σε μαθήματα Γεωμετρίας, τα οποία διεξάγονται με τον καλύτερο δυνατό τρόπο, τα παιδιά θα ασχοληθούν με δραστηριότητες μέσω των οποίων θα ανακαλύψουν σχέσεις τις οποίες αργότερα θα αποδείξουν (Van de Walle, ό.π., 521).

Σχετικά με το Επίπεδο 5, τα αντικείμενα σκέψης είναι τα συμπερασματικά αξιωματικά συστήματα για τη Γεωμετρία και τα προϊόντα της σκέψης είναι συγκρίσεις και αντιπαραθέσεις ανάμεσα τους. Αυτό είναι το επίπεδο ενός φοιτητή κάποιου Τμήματος Μαθηματικών (ό.π.).

1.1.2 Φάσεις μάθησης

Το μοντέλο των van Hiele, όπως είδαμε, τονίζει τη σπουδαιότητα της διαδικασίας διδασκαλίας-μάθησης. Οι μαθητές προχωρούν από το ένα επίπεδο στο επόμενο, ύστερα από προγραμματισμένη διδασκαλία, οργανωμένη σε 5 φάσεις διαδοχικών δραστηριοτήτων οι οποίες είναι απαραίτητες για να καταστούν οι μαθητές ικανοί -σε κάθε περίοδο μάθησης- να αναπτύξουν ένα υψηλότερο επίπεδο γεωμετρικής σκέψης.

Η μέθοδος και η οργάνωση της διδασκαλίας, το περιεχόμενο και τα υλικά που χρησιμοποιούνται σ' αυτή, έχουν ύψιστη παιδαγωγική αξία.[5] Η διδασκαλία που αναπτύσσεται σύμφωνα με τις πέντε (5) φάσεις μάθησης, που αναφέραμε προηγουμένως, προωθεί την απόκτηση ενός επιπέδου. Οι φάσεις αυτές ξεκινούν από πολύ συγκεκριμένες οδηγίες προς τους μαθητές μέχρι να καταλήξουν στην πλήρη ανεξαρτησία τους από το δάσκαλο και είναι οι εξής:

Φάση 1: Πληροφορία / Αναζήτηση

Στη φάση αυτή αναπτύσσεται συζήτηση γύρω από το αντικείμενο της μελέτης, γίνονται παρατηρήσεις, απευθύνονται ερωτήματα και εισάγεται το κατάλληλο ειδικό λεξιλόγιο. Σκοπός είναι η εξοικείωση των μαθητών με τα αντικείμενα και η

[5] Τουμάσης, ό.π., 352.

πληροφόρηση του δασκάλου σχετικά με τις προηγούμενες γνώσεις των μαθητών του πάνω στο συγκεκριμένο θέμα (Πιπίνος, 2006, 75).

Συγκεκριμένα, ο δάσκαλος φροντίζει να αναπτυχθεί συζήτηση ανάμεσα σ' αυτόν και τους μαθητές γύρω από το αντικείμενο της μελέτης. Έτσι, του δίνεται η ευκαιρία να καταλάβει το γνωστικό υπόβαθρο των μαθητών του, την αντίδρασή τους όταν χρησιμοποιείται ειδική ορολογία και να αντιληφθεί το πλαίσιο μέσα στο οποίο πρέπει να γίνει η μελέτη για να είναι αποτελεσματική.

Για παράδειγμα, ο δάσκαλος ρωτάει τους μαθητές: «Τι είναι ο ρόμβος; Το τετράγωνο; Μοιάζουν; Σε τι διαφέρουν; Μπορείς να σκεφτείς ένα τετράγωνο που να είναι και ρόμβος; Θα μπορούσε ένας ρόμβος να είναι και τετράγωνο;».

Οι δραστηριότητες, που δίνονται στους μαθητές στο στάδιο αυτό, σχετίζονται με τον χειρισμό, την αναγνώριση και αναπαράσταση σχημάτων, βοηθούν τόσο το δάσκαλο ώστε να μάθει ποια είναι η προϋπάρχουσα γνώση των μαθητών του γύρω από το θέμα της μελέτης, όσο και τους μαθητές στο να καταλάβουν ποια κατεύθυνση θα πάρει η επόμενη μελέτη τους (Τουμάσης, ό.π., 353).

Φάση 2: Κατευθυνόμενος προσανατολισμός / κατευθυνόμενη εργασία

Στη φάση αυτή οι μαθητές εξερευνούν τα αντικείμενα και ασχολούνται με δραστηριότητες και υλικά που ο δάσκαλος έχει επιλέξει, ώστε σταδιακά να οδηγηθούν στην ανακάλυψη των εννοιών που είναι χαρακτηριστικές για το επίπεδο στο οποίο βρίσκονται (Πιπίνος, ό.π., 75).

Πολλές από τις δραστηριότητες της φάσης αυτής είναι μικρές εργασίες που απαιτούν συγκεκριμένη απάντηση και οι οποίες έχουν σχεδιαστεί με τέτοιο τρόπο ώστε να αναπτύξουν συγκεκριμένες δεξιότητες. Για παράδειγμα, ο δάσκαλος θα μπορούσε να ζητήσει από τους μαθητές να κατασκευάσουν ένα ρόμβο με ίσες διαγώνιους, να χρησιμοποιώντας ένα τετραγωνισμένο χαρτί. Στην συνέχεια να κατασκευάσουν έναν άλλο μεγαλύτερο και έναν άλλο μικρότερο. Οι δραστηριότητες, που δίνονται στους μαθητές στο στάδιο αυτό, πρέπει να αποκαλύπτουν στους μαθητές σταδιακά, τα δομικά χαρακτηριστικά αυτού του επιπέδου, τα οποία είναι η αναγνώριση των ιδιοτήτων των σχημάτων και ο συσχετισμός διαφόρων σχημάτων μεταξύ τους (Τουμάσης, ό.π., 353).

Φάση 3: Επεξήγηση / Έκφραση

Οι μαθητές εκφράζουν και ανταλλάσσουν τις απόψεις που διαμορφώνουν και αναπτύσσουν τα κατάλληλα γλωσσικά μέσα για την περιγραφή των σχέσεων που υπάρχουν (Πιπίνος, ό.π., 75).

Πιο αναλυτικά, οι μαθητές, στηριζόμενοι σε συγκεκριμένες προηγούμενες εμπειρίες εκφράζουν τη γνώμη τους γύρω από τις δομές που έχουν παρατηρήσει. Καθήκον του δασκάλου στη φάση αυτή είναι να βοηθήσει τους μαθητές ώστε να ξεκαθαρίσουν τη χρήση της κατάλληλης ειδικής ορολογίας. Οι μαθητές κατά τη διάρκεια της φάσης αυτής αρχίζουν να διαμορφώνουν το σύστημα των συσχετίσεων ανάμεσα στις υπό μελέτη έννοιες (Τουμάσης, ό.π., 353).

Φάση 4: Ελεύθερος προσανατολισμός / ελεύθερη εργασία

Οι μαθητές ασχολούνται με πιο σύνθετες εργασίες διαβαθμισμένης δυσκολίας και εξερευνούν τις δραστηριότητες ελεύθερα με τον δικό τους προσωπικό τρόπο (Πιπίνος, ό.π., 75).

Στο επίπεδο αυτό, οι μαθητές έχουν περάσει από τον κατευθυνόμενο προσανατολισμό της φάσης 2 και ασχολούνται με πιο πολύπλοκες εργασίες, εργασίες με πολλά βήματα, εργασίες οι οποίες μπορούν να γίνουν με πολλούς τρόπους. Βρίσκουν μόνοι τους την κατεύθυνση που πρέπει να πάρουν για να λύσουν το πρόβλημα στο πεδίο της έρευνας και αποκτούν εμπειρία στο να βρίσκουν μόνοι τους τον τρόπο ανάλυσης των εργασιών (Τουμάσης, ό.π., 354).

Φάση 5: Ολοκλήρωση / Ενοποίηση

Στη φάση αυτή, η νέα γνώση συγκεντρώνεται και ενσωματώνεται στο σύνολο των διαθέσιμων γνώσεων και ικανοτήτων, ενώ ταυτόχρονα διαμορφώνεται μια σφαιρική άποψη για το νέο πλέγμα σχέσεων που προκύπτει (Πιπίνος, ό.π., 75).

Οι μαθητές επαναλαμβάνουν τις μεθόδους που έχουν στη διάθεσή τους και κάνουν μια σύνοψη. Τα αντικείμενα και οι σχέσεις συνενώνονται και ενσωματώνονται σε ένα γνωστικό σχήμα. Ο δάσκαλος συμβάλλει σε αυτή τη διαδικασία παρέχοντας σφαιρικές απόψεις των γνώσεων που οι μαθητές αποκτούν κάθε φορά. Καθώς πλησιάζει το τέλος της φάσης αυτής, οι μαθητές θα έχουν επιτύχει ένα νέο επίπεδο σκέψης. Η νέα ποιοτικά σκέψη αντικαθιστά την παλιότερη και οι μαθητές είναι σε θέση να επαναλάβουν τις ίδιες φάσεις μάθησης στο επόμενο επίπεδο (Τουμάσης, ό.π., 354).

1.2 Βασικές γεωμετρικές δεξιότητες

Συγχρόνως με την ανάπτυξη των επιπέδων γεωμετρικής σκέψης των παιδιών και βοηθητικά για την ομαλή εξέλιξη τους σε αυτά, λειτουργούν και καλλιεργούνται ορισμένες δεξιότητες γεωμετρικής φύσης (Πιπίνος, ό.π., 75).

Σύμφωνα με τους van Hiele, ο δάσκαλος πρέπει να επιδιώκει, μέσα από δραστηριότητες, ανάλογες με τις ικανότητες των μαθητών, να τους βοηθά να φτάσουν στο επόμενο επίπεδο. Παρακάτω θα περιγράψουμε πέντε (5) περιπτώσεις βασικών γεωμετρικών δεξιοτήτων, τις οποίες πρέπει να αποκτήσουν οι μαθητές κατά την εξοικείωσή τους με τη Γεωμετρία και που η έλλειψή τους εμποδίζει σοβαρά τη μάθησή της (Τουμάσης, ό.π., 336 ff).

- **Οπτικές δεξιότητες**

Η Γεωμετρία είναι ένα καθαρά οπτικό-παραστατικό μάθημα, συνεπώς οι οπτικές εμπειρίες αποτελούν ένα πρωταρχικής σημασίας εργαλείο για τους μαθητές. Τους επιτρέπουν να εξοικειώνονται με τις εικόνες και τα γεωμετρικά σχήματα ώστε να αποκτήσουν ευχέρεια στη χρήση και τον χειρισμό τους.

- **Λεκτικές δεξιότητες**

Ένα μάθημα Γεωμετρίας τονίζει τη χρήση της γλώσσας, περισσότερο ίσως από κάθε άλλο μάθημα, στα Μαθηματικά. Αυτό συμβαίνει διότι η Γεωμετρία χρησιμοποιεί ένα πολύ πλούσιο λεξιλόγιο γεμάτο ορολογίες.

Υπάρχουν ακριβείς ορισμοί, αξιώματα και προτάσεις οι οποίες περιγράφουν ιδιότητες των σχημάτων και συσχετίσεις μεταξύ τους. Οι μαθητές καλούνται να διαβάσουν και να μάθουν ένα πλήθος γεωμετρικού υλικού και να γράψουν επιπλέον αποδείξεις των θεωρημάτων ή των προβλημάτων. Η διαδικασία αυτή πρέπει να γίνει εξελικτικά και βαθμιαία και με τέτοιο τρόπο ώστε να λαμβάνεται υπ' όψιν η φύση του παιδιού και η βιολογική του ωριμότητα.

- **Σχεδιαστικές δεξιότητες**

Οι σχεδιαστικές δεξιότητες είναι απαραίτητες στο μάθημα της Γεωμετρίας, εφόσον η διεξαγωγή του είναι αδύνατη χωρίς αυτές. Θα πρέπει να αποκτώνται μέσα από κατάλληλες δραστηριότητες από τα πρώτα κιόλας μαθήματα Γεωμετρίας. Η χρήση του κανόνα και του διαβήτη για την κατασκευή γεωμετρικών σχημάτων, βοηθάει τους μαθητές να κατανοήσουν αργότερα τις ιδιότητες των σχημάτων αυτών.

- **Λογικές δεξιότητες**

Η Γεωμετρία είναι ένα από τα σχολικά μαθήματα που επιτρέπει στους μαθητές να μάθουν να αναλύουν τη μορφή ενός συλλογισμού και να αναγνωρίζουν την εγκυρότητα ή όχι ενός επιχειρήματος, στο πλαίσιο των γεωμετρικών ιδιοτήτων των σχημάτων και κατ' επέκταση σε προβλήματα της καθημερινής ζωής. Για να αναπτύξουν αυτές τις λογικές δεξιότητες οι μαθητές, χρειάζονται πρώτα να ασχοληθούν με τη μελέτη των γεωμετρικών σχημάτων και των ιδιοτήτων τους, με ένα τρόπο διαισθητικό και εμπειρικό και κατόπιν να μυηθούν στους κανόνες της λογικής. Οι μαθητές χρειάζονται εμπειρίες μέσα από δραστηριότητες πάνω σε μια διαισθητική-άτυπη βάση. Τέτοιου είδους δραστηριότητες βοηθούν τους μαθητές να αναπτύξουν τις λογικές τους δεξιότητες κατά ένα μη αυστηρό-άτυπο τρόπο, πριν να μάθουν πώς να διατυπώνουν γραπτώς μια τυπική-φορμαλιστική απόδειξη.

- **Δεξιότητες εφαρμογής**

Τα γεωμετρικά σχήματα και οι ιδιότητές τους αναγνωρίζονται ως αντικείμενα της πραγματικής ζωής. Κατανοείται η έννοια του μαθηματικού μοντέλου που αναπαριστά σχέσεις μεταξύ αντικειμένων του πραγματικού χώρου.

1.2.1 Βασικές ικανότητες ανά επίπεδο[6]

Παρακάτω παραθέτουμε τις βασικές γεωμετρικές δεξιότητες-ικανότητες, ταξινομημένες ανά επίπεδο, για τα τρία (3) πρώτα επίπεδα:

- **ΕΠΙΠΕΔΟ 1 (Αναγνώριση)**

  ✓ **Οπτικές:** Ο μαθητής είναι σε θέση να αναγνωρίζει διάφορα σχήματα από μια εικόνα καθώς και τις πληροφορίες που αυτά δίνουν.

  ✓ **Λεκτικές:** Ο μαθητής μπορεί να συσχετίζει ένα σχήμα με την αντίστοιχη ονομασία του και να καταλάβει από την περιγραφή για ποιο σχήμα πρόκειται.

  ✓ **Σχεδίασης:** Ο μαθητής έχει την ικανότητα να κατασκευάζει με άνεση σχήματα και να ονομάζει τα διάφορα μέρη τους.

  ✓ **Λογικές:** Ο μαθητής συνειδητοποιεί ότι υπάρχουν διαφορές και ομοιότητες ανάμεσα στα διάφορα σχήματα και κατανοεί τη διατήρηση του σχήματος σε διάφορες θέσεις.

  ✓ **Εφαρμογής:** Ο μαθητής αναγνωρίζει γεωμετρικά σχήματα σε αντικείμενα της πραγματικής καθημερινής ζωής.

- **ΕΠΙΠΕΔΟ 2 (Περιγραφή)**

  ✓ **Οπτικές:** Ο μαθητής μπορεί να διακρίνει τις ιδιότητες ενός σχήματος και να εντοπίζει ένα σχήμα σαν μέρος ενός πιο σύνθετου σχήματος.

  ✓ **Λεκτικές:** Ο μαθητής περιγράφει με άνεση διάφορες ιδιότητες ενός σχήματος χρησιμοποιώντας κατάλληλη ορολογία.

  ✓ **Σχεδίασης:** Ο μαθητής χρησιμοποιεί τις ιδιότητες ενός σχήματος για να κατασκευάσει το σχήμα.

  ✓ **Λογικές:** Ο μαθητής κατανοεί ότι τα σχήματα μπορούν να ομαδοποιηθούν σε διάφορες κατηγορίες με βάση τις ιδιότητές τους.

  ✓ **Εφαρμογής:** Ο μαθητής αναγνωρίζει τις γεωμετρικές ιδιότητες φυσικών αντικειμένων.

- **ΕΠΙΠΕΔΟ 3 (Σύνδεση)**

[6] Πιπίνος, 2006, 76.

- ✓ **Οπτικές:** Ο μαθητής αναγνωρίζει σχέσεις μεταξύ διαφόρων ειδών σχημάτων και κοινές ιδιότητες διαφόρων ειδών σχημάτων.

- ✓ **Λεκτικές:** Ο μαθητής μπορεί να δίνει τον ορισμό εννοιών άνετα και συνειδητά και να διατυπώνει προτάσεις που αναδεικνύουν τις σχέσεις μεταξύ των σχημάτων.

- ✓ **Σχεδίασης:** Δεδομένων κάποιων σχημάτων, ο μαθητής μπορεί να κατασκευάζει άλλα σχήματα μετατρέποντας ή συνδυάζοντας τα αρχικά.

- ✓ **Λογικές:** Ο μαθητής είναι σε θέση να χρησιμοποιεί τις ιδιότητες των σχημάτων, για να συμπεράνει αν μια ομάδα σχημάτων εμπεριέχεται σε μια άλλη ομάδα (κλάση).

- ✓ **Εφαρμογής:** Ο μαθητής κατανοεί την έννοια του μαθηματικού μοντέλου που αναπαριστά σχέσεις μεταξύ αντικειμένων του πραγματικού χώρου.

1.3 Επίπεδα van Hiele και κατασκευή γεωμετρικών αποδείξεων[7]

Όπως αναφέρθηκε και παραπάνω, το μοντέλο των van Hiele θέτει την ύπαρξη 5 διακριτών επιπέδων γεωμετρικής σκέψης. Υποθετικά οι μαθητές περνούν διαδοχικά από αυτά τα επίπεδα, αλλά δεν περνούν όλοι οι μαθητές στον ίδιο βαθμό. Ένας μαθητής, ο οποίος έχει κατακτήσει μόνο το επίπεδο ν, δεν θα μπορέσει να καταλάβει τον τρόπο σκέψης του επιπέδου ν+1 ή κάποιου υψηλότερου. Το Επίπεδο 3 του μοντέλου van Hiele, είναι ένα μεταβατικό επίπεδο από τη μη τυπική στην τυπική Γεωμετρία.

Η γνώση στο Επίπεδο 3 προέρχεται από βραχυχρόνιες σκέψεις σχετικά με τις ιδιότητες ενός σχήματος οι οποίες έχουν προέλθει από σκέψη σε χαμηλότερα επίπεδα. Στο Επίπεδο 3, οι μαθητές μπορούν να ακολουθήσουν μια μικρή απόδειξη, βασισμένη σε ιδιότητες που έμαθαν από συγκεκριμένες εμπειρίες, αλλά ίσως να μην είναι σε θέση να εξάγουν αυτοδύναμα τέτοιες αποδείξεις.

Σύμφωνα με το μοντέλο van Hiele, μόνο αν ένας μαθητής έχει φτάσει στο Επίπεδο 4 θα μπορεί να κατασκευάσει μόνος του τυπικές αποδείξεις, καθώς στο επίπεδο αυτό το εύρος της σκέψης περιλαμβάνει έννοιες όπως τα αξιώματα, το αντίστροφο ενός θεωρήματος και τις ικανές και αναγκαίες συνθήκες.

[7] Senk, 1983, 309 ff.

Έρευνες, οι οποίες χρησιμοποίησαν ως εργαλεία διάφορα τεστ, εξετάζουν τη σχέση ανάμεσα στην ικανότητα ενός μαθητή να κατασκευάσει μια απόδειξη και τις ικανότητες της γεωμετρικής του σκέψης χωρίς να περιλαμβάνονται αποδείξεις. Παρακάτω, παρατίθενται ορισμένα από τα τεστ που χρησιμοποιήθηκαν στις έρευνες:

A) The CDASSG Proof Test:

Η ικανότητα συγγραφής απόδειξης μετρήθηκε με βάση ένα τεστ αποτελούμενο από 6 μέρη το οποίο έπρεπε να ολοκληρωθεί σε 35 λεπτά. Το τεστ αποτελούνταν από 2 μέρη που απαιτούσαν σύντομου περιεχομένου απάντηση και 4 ολοκληρωμένες αποδείξεις τις οποίες καλούνταν να γράψει ο μαθητής. Η μία ολοκληρωμένη απόδειξη ήταν αυτή ενός πρότυπου κειμένου θεωρήματος και τα υπόλοιπα ήταν σαν ασκήσεις που βρίσκονται σε πολλά κείμενα.

B) The van Hiele Geometry Test:

Το επίπεδο σκέψης ενός μαθητή σύμφωνα με το μοντέλο van Hiele αξιολογήθηκε με βάση την επίδοση του στο van Hiele Geometry Test. Αυτό το τεστ των 35 λεπτών αποτελούνταν από 5 μικρότερα τεστ (subtests), καθένα από τα οποία περιλάμβανε 5 ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής βασισμένες σε ένα εκ των επιπέδων του μοντέλου van Hiele. Εάν ένας μαθητής απαντούσε σωστά σε τουλάχιστον 4 από τα 5 ερωτήματα του δοθέντος μικρότερου τεστ (subtest), τότε θεωρούνταν πως έχει επιτύχει το συγκεκριμένο επίπεδο στο οποίο αναφέρεται το μικρότερο τεστ (subtest).

Γ) Τεστ γνώσης βασικού περιεχομένου (Tests for knowledge of standard content):

Ο βαθμός κατάκτησης γνώσης βασικού γεωμετρικού περιεχομένου, η οποία δεν περιλαμβάνει αποδείξεις, αξιολογήθηκε το Φθινόπωρο με το Entering Geometry Test και την Άνοιξη από το Comprehensive Assessment Program-Geometry Test (Scott, Foresman και Company, 1980). Το πρώτο (Entering Geometry Test) περιείχε 19 ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής, οι οποίες κάλυπταν δεδομένα και έννοιες της Γεωμετρίας όπως εμβαδόν, περίμετρος και σχέσεις γωνιών, έννοιες οι οποίες παρουσιάζονται σε κείμενα και προγράμματα σπουδών του Γυμνασίου. Το δεύτερο (Comprehensive Assessment Program-Geometry Test) ήταν ένα τεστ κατάκτησης βασικής γνώσης αποτελούμενο από 40 ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής σχετικά με τη Γεωμετρία του επιπέδου και των στερεών. Οι ερωτήσεις αυτές έπρεπε να απαντηθούν σε 40 λεπτά και η βαθμολογία των μαθητών προέκυπτε από το πλήθος των ερωτήσεων που απάντησαν σωστά.

Τα αποτελέσματα των ερευνών αυτών δείχνουν πως η ικανότητα των μαθητών του Γυμνασίου να κατασκευάζουν γεωμετρικές αποδείξεις σχετίζεται άμεσα με το επίπεδο γεωμετρικής σκέψης του μοντέλου van Hiele που έχουν κατακτήσει. Ένας μαθητής, ο οποίος ξεκινά να παρακολουθεί μάθημα Γεωμετρίας στο Γυμνάσιο και δεν είναι ικανός να αναγνωρίσει τα συνήθη επίπεδα γεωμετρικά σχήματα, έχει ελάχιστες πιθανότητες να μάθει να κατασκευάζει γεωμετρικές αποδείξεις αργότερα μέσα στη σχολική χρονιά. Εάν ξεκινά τη χρονιά έχοντας την ικανότητα να αναγνωρίζει συνηθισμένα γεωμετρικά σχήματα χωρίς όμως να μπορεί να περιγράψει τις ιδιότητες τους, τότε πιθανόν να είναι σε θέση να κάνει κάποιες απλές βασικές γεωμετρικές αποδείξεις μέχρι το τέλος του χρόνου αλλά ένας τέτοιος μαθητής έχει πιθανότητα λιγότερη από 1/3 να αποκτήσει ικανότητα κατασκευής απόδειξης. Αντιθέτως, ένας μαθητής, ο οποίος μπορεί να αναγνωρίσει γεωμετρικά σχήματα εξ όψεως και να περιγράψει τις ιδιότητές τους, έχει τουλάχιστον 50-50 πιθανότητα να κατακτήσει ικανότητα κατασκευής αποδείξεων μέχρι το τέλος του έτους. Επιπλέον ένας μαθητής που είναι σε θέση να αιτιολογεί από ορισμούς και να αναγνωρίζει περιπτώσεις κατηγοριοποίησης, έχει ακόμη μεγαλύτερη πιθανότητα να κατακτήσει την ικανότητα κατασκευής μιας απόδειξης.

Τα αποτελέσματα αυτά υφίστανται είτε λάβει κάποιος υπ' όψιν το επίπεδο γνώσης του μαθητή κατά την είσοδο του στο Γυμνάσιο είτε όχι.
Παρόλο που δεν υπάρχει μεμονωμένο επίπεδο van Hiele, το οποίο να εξασφαλίζει μελλοντική επιτυχία στην κατασκευή απόδειξης, το Επίπεδο 2 παρουσιάζεται σαν κρίσιμο επίπεδο εισόδου.

Σύμφωνα με τους van Hiele, μαθητές οι οποίοι είναι κάτω από το Επίπεδο 3 δεν θα είναι σε θέση να κάνουν αποδείξεις με άλλο τρόπο πέραν της αποστήθισης. Οι μαθητές που βρίσκονται στο Επίπεδο 3, ίσως να είναι σε θέση να κάνουν μικρές αποδείξεις βάσει εμπειρικά προερχόμενων κατασκευών αλλά μόνο οι μαθητές του Επιπέδου 4 ή 5 πρέπει να αναμένεται ότι θα μπορούν να συντάξουν τυπικές αποδείξεις.

1.4 Αναθεωρημένο μοντέλο van Hiele

Η θεωρία των van Hiele παρουσιάζει ένα μαθησιακό μοντέλο, το οποίο περιγράφει τους διάφορους τύπους σκέψης από τους οποίους διέρχονται οι μαθητές, καθώς κινούνται από μια καθολική αντίληψη των γεωμετρικών μορφών σε μια κατανόηση της τυπικής γεωμετρικής απόδειξης. Αργότερα οι van Hiele συνοψίζουν το μοντέλο τους σε τρία (3) αντί για πέντε (5) επίπεδα γεωμετρικής σκέψης.

Συγκεκριμένα, ο P. M. van Hiele διευκρίνισε ότι ενδιαφέρεται ιδιαίτερα για τα πρώτα τρία επίπεδα, και κατόπιν περιέγραψε ότι στην πραγματικότητα υπάρχουν μόνο τρία επίπεδα για τα σχολικά Μαθηματικά. Η ονομασία αυτών των τριών επιπέδων είναι: Οπτικό, Περιγραφικό, Θεωρητικό.

Στο αναθεωρημένο αυτό μοντέλο των τριών επιπέδων, κάθε επίπεδο επιτυγχάνεται καθώς ο μαθητής διέρχεται μέσα από διαφορετικές περιόδους μάθησης. Όσο διαρκεί κάθε περίοδος, ο μαθητής διανύει πέντε (5) φάσεις μάθησης, στις οποίες ασχολείται με κατάλληλα αντικείμενα μελέτης, αναπτύσσει ειδικό, σχετικό με το αντικείμενο μελέτης, λεξιλόγιο και παίρνει μέρος σε ειδικά σχεδιασμένες, διαδραστικές δραστηριότητες. Έτσι, με το τέλος κάθε φάσης, ολοκληρώνεται η αντίστοιχη περίοδος μάθησης και ο μαθητής θα είναι σε θέση να προχωρήσει με επιτυχία στο επόμενο, υψηλότερο επίπεδο σκέψης (Teppo, 1991, 210).

Τα οπτικό, περιγραφικό, και θεωρητικό επίπεδο, οι περίοδοι μάθησης που οδηγούν σε κάθε ένα από αυτά τα επίπεδα καθώς και οι φάσεις της μάθησης, συνοψίζονται στο σχήμα που ακολουθεί και το οποίο περιγράφει πλήρως το αναθεωρημένο μοντέλο:

Θεωρητικό (Επίπεδο 3) — Χρήση παραγωγικής αιτιολόγησης για την απόδειξη γεωμετρικών σχέσεων

Περίοδος Μάθησης 2

Φάσεις Μάθησης
Ολοκλήρωση / Ενοποίηση
Ελεύθερος προσανατολισμός
Επεξήγηση
Κατευθυνόμενος προσανατολισμός
Πληροφορία / Αναζήτηση

Περιγραφικό (Επίπεδο 2) — Αναγνώριση αντικειμένων από τις γεωμετρικές τους ιδιότητες

Περίοδος Μάθησης 1

Φάσεις Μάθησης
Ολοκλήρωση / Ενοποίηση
Ελεύθερος προσανατολισμός
Επεξήγηση
Κατευθυνόμενος προσανατολισμός
Πληροφορία / Αναζήτηση

Οπτικό (Επίπεδο 1) — Ολική αναγνώριση γεωμετρικών αντικειμένων

Σχήμα 2: Το αναθεωρημένο μοντέλο διδασκαλίας van Hiele (επίτευξη). Κάθε επίπεδο σκέψης χωρίζεται από μια περίοδο μάθησης, χρησιμοποιώντας τις 5 φάσεις μάθησης που καθιστά ικανούς τους μαθητές να ανεβαίνουν στο επόμενο επίπεδο σκέψης. (Teppo, 1999, 210)

1.4.1 Επίπεδα Σκέψης, Περίοδοι και Φάσεις Μάθησης του Αναθεωρημένου Μοντέλου

Παρακάτω παρουσιάζονται αναλυτικά τα επίπεδα σκέψης του αναθεωρημένου μοντέλου van Hiele που αναφέραμε, οι περίοδοι μάθησης καθώς και οι φάσεις της μάθησης, που καθιστούν ικανούς τους μαθητές να ανεβαίνουν στο επόμενο επίπεδο σκέψης (ό.π., 210 ff).

1.4.1.1 Επίπεδα Σκέψης

1) Οπτικό (Επίπεδο 1)

Οι μαθητές αναγνωρίζουν τα σχήματα καθολικά. Το επίπεδο αυτό περιλαμβάνει δραστηριότητες μέσω των οποίων οι μαθητές περνούν από το Επίπεδο Σκέψης 1 στο Επίπεδο Σκέψης 2. Τα αντικείμενα μελέτης σε αυτή τη φάση είναι οι ιδιότητες ξεχωριστών σχημάτων (ό.π., 210 f).

Περίοδος μάθησης 1:
Φάσεις Μάθησης:
Α) Πληροφορία/ Αναζήτηση
Β) Κατευθυνόμενος προσανατολισμός/ εργασία
Γ) Επεξήγηση/ Έκφραση
Δ) Ελεύθερος προσανατολισμός/ εργασία
Ε) Ολοκλήρωση/ Ενοποίηση

2) Περιγραφικό (Επίπεδο 2)

Οι μαθητές ξεχωρίζουν τα σχήματα με βάση τις γεωμετρικές ιδιότητές τους. Το επίπεδο αυτό περιλαμβάνει δραστηριότητες, μέσω των οποίων οι μαθητές περνούν από το Επίπεδο Σκέψης 2 στο Επίπεδο Σκέψης 3. Τα αντικείμενα της μελέτης σε αυτή τη φάση είναι οι συσχετισμοί μεταξύ των ιδιοτήτων των γεωμετρικών σχημάτων και η ταξινόμηση αυτών. Οι μαθητές ερευνούν τρόπους διάταξης συσχετιζόμενων ιδιοτήτων, έτσι ώστε κάθε ιδιότητα να προκύπτει ως αποτέλεσμα της προηγούμενης. Χρησιμοποιώντας μη τυπικούς απαγωγικούς συλλογισμούς, αρχίζουν να γίνονται ικανοί να αποδεικνύουν σχέσεις (ό.π.).

Περίοδος Μάθησης 2
Φάσεις Μάθησης:
Α) Πληροφορία/ Αναζήτηση
Β) Κατευθυνόμενος προσανατολισμός/ εργασία
Γ) Επεξήγηση/ Έκφραση
Δ) Ελεύθερος προσανατολισμός/ εργασία
Ε) Ολοκλήρωση/ Ενοποίηση

3) Θεωρητικό (Επίπεδο 3):

Οι μαθητές είναι σε θέση να σχεδιάσουν μια τυπική γεωμετρική απόδειξη και να κατανοήσουν τη χρησιμοποιούμενη διαδικασία. Εδώ η γλώσσα που χρησιμοποιείται έχει πιο θεωρητικό και αφηρημένο χαρακτήρα (ό.π.).

1.4.1.2 Περίοδοι Μάθησης

Περίοδος Μάθησης 1:
Οι μαθητές μετακινούνται από το Επίπεδο 1 προς το Επίπεδο 2 της γεωμετρικής σκέψης. Η διδασκαλία, κατά τη διάρκεια αυτής της περιόδου, επικεντρώνεται στη μελέτη των ιδιοτήτων μεμονωμένων σχημάτων. Για παράδειγμα, οι μαθητές αρχίζουν να αναγνωρίζουν ότι ένα ισόπλευρο τρίγωνο περιέχει τρεις ίσες πλευρές και έχει τρία ύψη που είναι άξονες συμμετρίας για κάθε πλευρά (ό.π., 211).

Περίοδος Μάθησης 2:
Κατά τη διάρκεια αυτής της περιόδου οι μαθητές κινούνται από το Επίπεδο 2 προς το Επίπεδο 3 της γεωμετρικής σκέψης. Η διδασκαλία επικεντρώνεται στους συσχετισμούς μεταξύ των ιδιοτήτων των γεωμετρικών σχημάτων καθώς και στο πως αυτές μπορούν να ταξινομηθούν. Χρησιμοποιώντας τον άτυπο παραγωγικό συλλογισμό, οι μαθητές μπορούν να αποδείξουν τις σχέσεις (ό.π.).

1.4.1.3 Φάσεις Μάθησης[8]

- **Πρώτη φάση (Αναζήτηση-Πληροφορία):**

Παρουσιάζεται στους μαθητές υλικό σχετικό με το τρέχον επίπεδο μάθησης.

- **Δεύτερη φάση (Κατευθυνόμενος προσανατολισμός):**

Ο μαθητής εξερευνά το αντικείμενο της μελέτης μέσω προσεκτικά κατευθυνόμενων δομημένων δραστηριοτήτων.

- **Τρίτη φάση (Επεξήγηση):**

Οι μαθητές και ο δάσκαλος συζητούν για τα αντικείμενα μελέτης. Ο ρόλος του δασκάλου σε αυτή τη φάση είναι να βοηθά τους μαθητές στη χρήση συγκεκριμένης και κατάλληλης γλώσσας.

[8] Teppo, ό.π., 212.

- **Τέταρτη φάση (Ελεύθερος προσανατολισμός):**

Οι μαθητές ασχολούνται με πιο πολλές και σύνθετες εργασίες, με ανοιχτά προβλήματα, τα οποία μπορούν να προσεγγιστούν και να λυθούν με πολλούς τρόπους.

- **Πέμπτη φάση (Ενοποίηση):**

Δάσκαλος και μαθητές συνοψίζουν ό,τι έχουν μάθει, με σκοπό να σχηματίσουν μια γενική άποψη γύρω από το αντικείμενο της μελέτης τους.

Συνοψίζοντας:

Οι δύο **περίοδοι μάθησης** που αναφέραμε παραπάνω, οδηγούν ένα μαθητή από το ένα επίπεδο σκέψης στο επόμενο και δίνουν τα παραδείγματα των βημάτων που πρέπει να ακολουθήσει κανείς στη διδασκαλία του.

Οι **φάσεις μάθησης** της κάθε περιόδου, προτείνουν μια αλληλεπίδραση μεταξύ των μαθητών και του καθηγητή. Η αξιοποίηση τεχνολογικών μέσων στη διδασκαλία των Μαθηματικών με σκοπό την έρευνα γύρω από το αντικείμενο μελέτης, μπορεί να ενισχύσει την επιθυμητή αυτή αλληλεπίδραση, αρκεί να γίνεται με τρόπο αποτελεσματικό.

Οι καθηγητές μπορούν να παρακινήσουν και να εμπλουτίσουν την εκμάθηση των μαθητών τους μέσα από τις πέντε φάσεις μάθησης, καλώντας τους να ασχοληθούν με στοχευμένα ανοικτά προβλήματα. Φυσικά, απαραίτητη προϋπόθεση είναι να έχουν οι καθηγητές κατάλληλη εμπειρία στα επίπεδα μάθησης των μαθητών τους και στις περιοχές που διδάσκουν, έτσι ώστε να είναι αποτελεσματική η διδασκαλία τους.

Για τη διδασκαλία ανοιχτών προβλημάτων, οι φάσεις μάθησης van Hiele παρέχουν ένα πλήρες σχέδιο διδασκαλίας και εκμάθησης όταν χρησιμοποιείται ένα δυναμικό λογισμικό εργαλείων, όπως θα δούμε και στη συνέχεια.

1.5 Η Παιδαγωγική αξία του μοντέλου van Hiele[9]

Το μοντέλο της γεωμετρικής σκέψης και οι φάσεις της μάθησης που αναπτύχθηκαν από τους van Hiele, έχουν επιβεβαιωθεί από τη μελέτη σχετικά με τη μάθηση της Γεωμετρίας και την ανάπτυξη της γεωμετρικής σκέψης του παιδιού. Το βασικό συμπέρασμα, που προκύπτει από τη μελέτη αυτή, είναι ότι η σωστή διδασκαλία μπορεί να συμβάλλει στη δημιουργία και την ενίσχυση της γεωμετρικής σκέψης των μαθητών. Από το έργο των van Hiele προκύπτει πως οι μαθητές, θα πρέπει να αποκτήσουν πολλές διαφορετικές εμπειρίες στη Γεωμετρία, έτσι ώστε να αναπτύξουν τη σκέψη τους στον συγκεκριμένο τομέα. Για να συμβεί αυτό, θα πρέπει να εισάγουμε

[9] Τουμάσης, 2000, 354 f.

τους μαθητές από νωρίς και σταδιακά στον γεωμετρικό τρόπο σκέψης και να αλλάξουμε τον τρόπο διδασκαλίας της Ευκλείδειας Γεωμετρίας βασιζόμενοι στη θεωρία των van Hiele.

Πιο συγκεκριμένα, θα πρέπει:

1. Να διδαχθεί πρακτική / σχεδιαστική Γεωμετρία στους μαθητές των πρώτων τάξεων της Δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης με πρακτικές δραστηριότητες. Αυτές θα έπρεπε να περιλαμβάνουν την διερεύνηση κάποιων προτύπων, τη διαισθητική αντίληψη του χώρου, ιδιότητες πολυγώνων και πολυέδρων, ομοιότητα, μετρήσεις, κατασκευές, συμμετρίες, συγκρίσεις κτλ. Ο δάσκαλος μέσω αυτών των δραστηριοτήτων οφείλει να ενθαρρύνει την εξαγωγή συμπερασμάτων από τους μαθητές του και την ανάπτυξη της παραγωγικής τους σκέψης. Ωστόσο, δεν πρέπει να απαιτεί από αυτούς να διατυπώνουν αυστηρά δομημένες τυπικές αποδείξεις.

2. Να πεισθούν οι μαθητές για την αναγκαιότητα της χρήσης των γεωμετρικών οργάνων, δηλ. του κανόνα και του διαβήτη, προκειμένου να γίνονται φανερές οι ιδιότητες των σχημάτων. Αυτό θα πρέπει να ξεκαθαριστεί από την πρώτη κιόλας επαφή των μαθητών με τη Γεωμετρία. Σχήματα κατασκευασμένα με το χέρι δεν πρέπει να γίνονται δεκτά από το δάσκαλο, αφού δεν είναι ακριβή. Από τη στιγμή που το μάθημα της Γεωμετρίας είναι κατ’ εξοχήν «οπτικό», η πιθανότητα αποτυχίας λόγω μη καλού σχήματος είναι πολύ υψηλή.

3. Να αναπτύσσονται δραστηριότητες που θα συμβάλλουν ώστε οι μαθητές να προχωρήσουν σε ανώτερο επίπεδο. Οι van Hiele θεωρούσαν σημαντικό να σχεδιάζουν οι δάσκαλοι δραστηριότητες, τέτοιες ώστε ο μαθητής να γνωρίζει τη χαρά της ανακάλυψης και του πειραματισμού, ενώ ταυτόχρονα θα εξοικειώνεται με τα γεωμετρικά σχήματα πριν διδαχθεί η παραγωγική σκέψη.

4. Να συνειδητοποιήσουν οι δάσκαλοι των Μαθηματικών ότι βρίσκονται σε διαφορετικά επίπεδα σκέψης με τους μαθητές. Είναι συνηθισμένο το φαινόμενο δάσκαλος και μαθητές να σκέπτονται γύρω από την ίδια έννοια, αλλά σε διαφορετικά επίπεδα. Για παράδειγμα, ενώ ο δάσκαλος μπορεί να διατυπώνει έναν αυστηρό ορισμό του ορθογωνίου παραλληλογράμμου (επίπεδο 3), οι μαθητές μπορεί να απορούν που δεν αναφέρθηκε και στις τόσες άλλες ιδιότητες του ορθογωνίου, γιατί ίσως να βρίσκονται στο επίπεδο 2, στο οποίο σκέπτονται το ορθογώνιο σαν μια συλλογή από ιδιότητες τις οποίες πρέπει να έχει (αναγκαίες συνθήκες).

5. Να αξιοποιήσουν οι δάσκαλοι το μοντέλο της γεωμετρικής σκέψης των van Hiele και να μεταφέρουν την φιλοσοφία του στη σύγχρονη διδασκαλία, μέσω της ανάπτυξης κατάλληλων διδακτικών υλικών και δραστηριοτήτων, σύμφωνα με τις βασικές του αρχές.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2^{o}

ΠΕΡΙΒΑΛΛΟΝΤΑ ΔΥΝΑΜΙΚΗΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ ΚΑΙ ΛΟΓΙΣΜΙΚΟ «GEOGEBRA»

Η Δυναμική Γεωμετρία και τα συστήματα Υπολογιστικής Άλγεβρας έχουν επηρεάσει σε μεγάλο βαθμό τη Μαθηματική Εκπαίδευση (Hohenwarter & Fuchs, 2004, 1).

2.1 Περιβάλλοντα Μάθησης μέσω Υπολογιστή και Μαθηματικά

Οι υπολογιστές χρησιμοποιήθηκαν πρώτη φορά στον τομέα των Μαθηματικών για τον υπολογισμό αριθμών, την εφαρμογή αριθμητικών τεχνικών στην επίλυση εξισώσεων και τον έλεγχο της εγκυρότητας ορισμένων ιδιοτήτων της Αναλυτικής Γεωμετρίας (Balacheff & Kaput, 1996, 471).

Στα τέλη της δεκαετίας του 1960, οι συμβολικοί χειρισμοί και εν συνεχεία τη δεκαετία του 1970 η γραφική αναπαράσταση συναρτήσεων, ήταν πλέον εφικτά. Έως το 1980, οι παραπάνω λειτουργίες είχαν βρει τον δρόμο τους σε εκπαιδευτικά περιβάλλοντα ενώ ως τα τέλη της δεκαετίας του 1980 έγινε αμφίδρομη σύνδεση ανάμεσα στη συμβολοσειρά χαρακτήρων και στις συντεταγμένες της γραφικής αναπαράστασης μιας συνάρτησης. Η δυνατότητα αυτή αποτέλεσε το πρώτο βήμα για αναπαραστάσεις που θα μπορούσαν να τροποποιηθούν άμεσα από τον χρήστη και οι οποίες θα του παρείχαν άμεση δυναμική ανατροφοδότηση με χρήση κατάλληλων συμβόλων. Ουσιαστικά, έγινε το πρώτο βήμα για την επίτευξη της αλληλεπίδρασης-επικοινωνίας μεταξύ μαθητή και υπολογιστή, δυνατότητα η οποία στον τομέα της Πληροφορικής είναι γνωστή ως διεπαφή (ό.π.).

Οι πρώτες εφαρμογές των υπολογιστών για Μαθηματικά, περιλάμβαναν πολλά στοιχεία προγραμματισμού και η πολυπλοκότητα της διεπαφής ήταν τέτοια, ώστε η εκμάθηση της χρήσης του λογισμικού αποτελούσε από μόνη της ένα σημαντικό πρώτο βήμα. Ωστόσο, σε βάθος χρόνου, επιτεύχθηκε ένα νέο επίπεδο ρεαλισμού των μαθηματικών αντικειμένων (ό.π.).

Αυτό οφειλόταν στο γεγονός ότι τα μαθησιακά περιβάλλοντα σχεδιάζονταν με τέτοιο τρόπο ώστε, αφενός επέτρεπαν στον χρήστη (μαθητή) να εκφράσει τις μαθηματικές του ιδέες, χρησιμοποιώντας ένα μέσο επικοινωνίας όσο το δυνατόν πιο κοντινό στη συνήθη μαθηματική γλώσσα, αφετέρου παρείχαν ανατροφοδότηση στο χρήστη που μπορούσε να διαβαστεί απευθείας με όρους μαθηματικών φαινομένων (ό.π.).

Η ικανότητα πρόσβασης σε μαθηματικά αντικείμενα μέσω διαφόρων συνδεδεμένων αναπαραστάσεων απαιτούσε μια στενή σχέση μεταξύ της αναπαράστασης στο εσωτερικό του υπολογιστή και της διεπαφής, η οποία δεν μπορούσε να συνεχίσει να θεωρείται απλό επιφανειακό χαρακτηριστικό του λογισμικού (ό.π.).

Χαρακτηριστικό γνώρισμα των αποτελεσματικών περιβαλλόντων μάθησης μέσω υπολογιστή, συγκριτικά με άλλου τύπου εκπαιδευτικά υλικά, υπήρξε ο εγγενώς γνωστικός τους χαρακτήρας. Μέσα διδασκαλίας όπως συγκεκριμένα χειροπιαστά υλικά (π.χ. τα λεγόμενα «τουβλάκια») που χρησιμοποιούνταν για τη διδασκαλία της αρίθμησης και της πρώιμης Αριθμητικής, μηχανικά συστήματα σχεδίασης και οπτικοακουστικά εργαλεία, δεν ενσάρκωναν το γνώρισμα «κλειδί» ενός περιβάλλοντος μάθησης μέσω υπολογιστή. Ουσιαστικά, το μόνο που έκαναν ήταν να υπολογίζουν τις τυπικές αναπαραστάσεις των μαθηματικών αντικειμένων και σχέσεων (ό.π., 469).

Η αλληλεπίδραση μεταξύ μαθητή και υπολογιστή (δηλ. η διεπαφή), βασίστηκε στη δυνατότητα που παρέχει το υπολογιστικό περιβάλλον στον μαθητή να εισάγει δεδομένα στο σύστημα (μηχανισμός εισόδου) και αυτομάτως να δει στην οθόνη (μηχανισμός εξόδου) τα αποτελέσματα και τις αλλαγές που προκάλεσε αυτή η είσοδος δεδομένων. Δηλαδή, ο χρήστης μπορούσε να εισάγει τα στοιχεία που ήθελε στο σύστημα, το τελευταίο τα επεξεργαζόταν κατάλληλα ερμηνεύοντας τα σύμβολα και κάνοντας τους απαιτούμενους υπολογισμούς, για να δώσει στο τέλος τη σωστή ανατροφοδότηση, επιτρέποντας την ανάγνωσή της από το χρήστη ως μαθηματικό φαινόμενο (ό.π., 471).

Ο γνωστικός χαρακτήρας των περιβαλλόντων μάθησης με χρήση υπολογιστή, γέννησε υψηλές προσδοκίες στη μαθηματική εκπαίδευση, σχετικά με την υπόθεση ότι οι υπολογιστές θα επιτρέψουν μια βαθύτερη και πιο άμεση μαθηματική εμπειρία. Αυτές οι εκπαιδευτικές προσδοκίες αφορούν την αλλαγή της μαθηματικής εμπειρίας των μαθητών και δεν στοχεύουν στη διευκόλυνση ή στην αυτοματοποίηση ενός συγκεκριμένου παιδαγωγικού ύφους (ό.π., 470).

2.2 Μικρόκοσμοι[10] (Microworlds)

Οι μαθηματικοί Μικρόκοσμοι, παρέχοντας μια δυναμική προσέγγιση ενός τυπικού συστήματος, επιτρέπουν στο μαθητή να εξερευνήσει ταυτόχρονα τη δομή των αντικειμένων στα οποία έχει πρόσβαση, τις μεταξύ τους σχέσεις και την αναπαράσταση που τα καθιστά προσβάσιμα.

---

[10] Balacheff & Kaput, 1996, 471 ff.

Ένας Μικρόκοσμος αποτελείται από τα παρακάτω αλληλένδετα βασικά χαρακτηριστικά:

1) Ένα σύνολο πρωταρχικών αντικειμένων, στοιχειωδών πράξεων πάνω σε αυτά τα αντικείμενα και κανόνων που εκφράζουν τους τρόπους με τους οποίους μπορούν να εκτελεστούν και να συσχετιστούν οι πράξεις αυτές μεταξύ τους, χαρακτηριστικά που αποτελούν τη συνήθη δομή ενός τυπικού, με τη μαθηματική έννοια, συστήματος.

2) Ένα πεδίο φαινομενολογίας που συνδέει αντικείμενα και ενέργειες πάνω σε αυτά, με μαθηματικά φαινόμενα που εμφανίζονται στην οθόνη του υπολογιστή. Αυτό το πεδίο φαινομενολογίας, καθορίζει τον τύπο της ανατροφοδότησης που θα δώσει ο Μικρόκοσμος στον χρήστη, ως συνέπεια των ενεργειών και αποφάσεων του.

Έτσι, η πιθανότητα μετατροπής μιας πολύπλοκης πράξης σε μία καινούργια απλούστερη ή η τροποποίηση σύνθετων αντικειμένων ώστε να γίνουν προσβάσιμα για περαιτέρω χρήση, είναι λειτουργικές-δυνατότητες που χαρακτηρίζουν την έννοια του Μικρόκοσμου. Από αυτή την άποψη, θα μπορούσαμε να πούμε ότι ο Μικρόκοσμος συμβάλλει στο να εξελίξει ο μαθητής τον τρόπο με τον οποίο αναπτύσσει τις γνώσεις του.

2.2.1. Βασικά Παραδείγματα Μικρόκοσμων[11]

Ας δούμε τώρα δύο βασικά παραδείγματα Μικρόκοσμων:

1. Η Γεωμετρία της Χελώνας, ένα υπολογιστικό περιβάλλον Γεωμετρίας σε γλώσσα Logo,
2. Η Γεωμετρία Cabri.

Με μια πρώτη ματιά και οι δύο αυτοί Μικρόκοσμοι φαίνεται να μοιράζονται το ίδιο πεδίο φαινομενολογίας, το οποίο αποτελείται από σχέδια που θα μπορούσαν να εξυπηρετήσουν την εκμάθηση της Γεωμετρίας. Αν κοιτάξουμε όμως λίγο βαθύτερα, θα εντοπίσουμε βασικές διαφορές στα πεδία φαινομενολογίας τους.

Σε ένα περιβάλλον γλώσσας Logo, τα σχέδια είναι στατικά. Ο χρήστης μπορεί να τα σχεδιάσει, να τα επανασχεδιάσει ή να τροποποιήσει κάποιες εκδοχές τους, αλλά μόνο εάν και εφόσον τροποποιήσει τις εντολές του κώδικα σε γλώσσα Logo, βάσει των οποίων αυτά έχουν παραχθεί. Από την άλλη, στη Γεωμετρία του Cabri, ο χρήστης μπορεί άμεσα να τροποποιήσει τα σχέδια, σύροντάς τα σε ελεύθερα σημεία της οθόνης. Εδώ, εγγενή σχέδια είναι όλα αυτά που μπορούν να σχεδιαστούν με κανόνα

[11] Balacheff & Kaput, 1996, 475.

και διαβήτη, ενώ σε περιβάλλον Logo, ο χρήστης μπορεί να σχεδιάσει οποιοδήποτε σύνολο αυθαίρετων σημείων με την απαρίθμηση τους ή δημιουργώντας τα με συναρτήσεις που ορίζονται σε αριθμητικά τμήματα. Συνεπώς, αυτά τα δύο περιβάλλοντα έχουν ουσιαστικές διαφορές ως προς το γνωστικό επίπεδο.

Και στα δύο περιβάλλοντα, οι μαθητές καλούνται να διαπιστώσουν στο τέλος μιας γεωμετρικής κατασκευής, αν σχεδίασαν αυτό που στόχευαν να σχεδιάσουν, δηλαδή το κατά πόσο είναι έγκυρη η κατασκευή τους. Αυτό το κριτήριο εγκυρότητας βασίζεται κυρίως σε αντιληπτικά αποδεικτικά στοιχεία, ωστόσο η απόδειξη αυτή έχει διαφορετική βάση σε κάθε περιβάλλον.

Στη Γεωμετρία του Cabri, ένα σχήμα πρέπει να διατηρεί τις προκαθορισμένες ιδιότητές του και τις γεωμετρικές σχέσεις με τις οποίες κατασκευάστηκε, καθώς σύρεται σε διάφορα σημεία της οθόνης. Αυτό είναι και το λεγόμενο «dragging test» που καθιστά μια κατασκευή έγκυρη. Ωστόσο, αυτή η ανατροφοδότηση εγκυρότητας μπορεί να μην είναι φανερή απευθείας στους μαθητές, παρόλο που μπορεί να φαίνεται προφανής σε πιο έμπειρους χρήστες. Στο περιβάλλον της γλώσσας Logo, ο στατικός χαρακτήρας των αντικειμένων, προσφέρει μια πιο εύθραυστη βάση εγκυρότητας, εκτός εάν ο μαθητής συντονίσει την οπτική ανατροφοδότηση με αξιολόγηση της συμβολικής περιγραφής.

Ως εκ τούτου, για να χαρακτηρίσουμε έναν Μικρόκοσμο, δεν μπορούμε να παραμείνουμε στο επίπεδο της τυπικής περιγραφής ούτε στο επίπεδο της περιγραφής των ειδικών οθονών της εφαρμογής του. Απαιτείται μια περιγραφή του σχετικού πεδίου φαινομενολογίας και του είδους της ανατροφοδότησης που παρέχει το σύστημα, αφού η μάθηση θα είναι το αποτέλεσμα της προσαρμογής των μαθητών σε αυτά τα μαθησιακά περιβάλλοντα. Κατά την προσαρμοστική διαδικασία, ο τρόπος με τον οποίο οι μαθητές κατανοούν την ανάδραση που τους παρέχεται και αντλούν από αυτή μια κατανόηση των σχημάτων της δικής τους δραστηριότητας, διαμορφώνει το νόημα που κατασκευάζουν σχετικά με τα Μαθηματικά που εμπλέκονται στη γεωμετρική κατασκευή.

2.3 Περιβάλλοντα Δυναμικής Γεωμετρίας

Το περιβάλλον Δυναμικής Γεωμετρίας (DGE ~ *Dynamic Geometry Environment*), είναι ένας Μικρόκοσμος με ενσωματωμένη υποδομή την Ευκλείδεια Γεωμετρία. Σε αυτό το υπολογιστικό περιβάλλον, οι χρήστες (μαθητές), μπορούν να κατασκευάσουν τα γεωμετρικά σχήματα που επιθυμούν και να αλληλεπιδράσουν μαζί τους. Χαρακτηριστικό παράδειγμα ενός τέτοιου περιβάλλοντος Δυναμικής Γεωμετρίας είναι το περιβάλλον «Geogebra», με το οποίο θα ασχοληθούμε στο συγκεκριμένο κεφάλαιο.

Είναι ένα σχετικά καινούργιο λογισμικό, το οποίο συνδυάζει δυνατότητες τόσο από τη Δυναμική Γεωμετρία, όσο και από την Υπολογιστική Άλγεβρα και αποτελεί ένα πολύ χρήσιμο εργαλείο για τη διδασκαλία των Μαθηματικών (Hohenwarter & Fuchs, ό.π., 1).

Η συνεισφορά των περιβαλλόντων Δυναμικής Γεωμετρίας είναι διπλή. Αρχικά, παρέχουν στους μαθητές ένα περιβάλλον στο οποίο μπορούν ελεύθερα να πειραματιστούν και να ελέγξουν την εγκυρότητα των εικασιών που σχηματίζουν κατά την αναζήτηση γεωμετρικών μοντέλων-ιδιοτήτων. Ακόμη, το λογισμικό Δυναμικής Γεωμετρίας, προσφέρει στους μαθητές έναν καινούργιο, μη παραδοσιακό τρόπο, ώστε να μάθουν και να κατανοήσουν τις έννοιες και τις μεθόδους των Μαθηματικών (Marrades & Gutiérrez, 2001, 88).

Επιπλέον, τα περιβάλλοντα Δυναμικής Γεωμετρίας εισάγουν ένα κριτήριο εγκυρότητας, όπως αναφέραμε και νωρίτερα, που αφορά κυρίως την επίλυση προβλημάτων κατασκευής. Το κριτήριο αυτό δεν βασίζεται στην εξωτερική εμφάνιση της παραγόμενης κατασκευής, αφού η τελευταία μπορεί να τροποποιηθεί χρησιμοποιώντας τη λειτουργία «dragging» ή αλλιώς «σύρσιμο» (Βλ. 2.3.3). Η δυνατότητα της «δοκιμής με το σύρσιμο» (dragging test) παρέχει έναν αντιληπτικό έλεγχο της εγκυρότητας μιας κατασκευής. Αν η λειτουργία αυτή μπορεί να χρησιμοποιηθεί σε ένα σχέδιο, αν αυτό περνάει δηλαδή το λεγόμενο «dragging-test», τότε η κατασκευή είναι αποδεκτή (έγκυρη) και συνεπάγεται ότι έχει δημιουργηθεί με συνέπεια ως προς τη γεωμετρική θεωρία (Jones, 2001, 58). Στην περίπτωση αυτή το σχέδιο αποτελεί ένα σχήμα.

Ουσιαστικά, σε ένα περιβάλλον Δυναμικής Γεωμετρίας, ο χρήστης μπορεί να κατασκευάσει οποιοδήποτε σχέδιο επιθυμεί. Αν το σχέδιο αυτό συρθεί και διατηρήσει αναλλοίωτα τα χαρακτηριστικά και τις ιδιότητες βάσει των οποίων κατασκευάστηκε, τότε μπορεί να θεωρηθεί σχήμα, αφού η δημιουργία του έχει βασιστεί σε κανόνες της Γεωμετρίας.

Θα δούμε και στη συνέχεια (2.3.2) αναλυτικότερα τη διάκριση ανάμεσα στους όρους *σχέδιο* και *σχήμα*.

2.3.1 Ιστορική Αναδρομή στα Περιβάλλοντα Δυναμικής Γεωμετρίας[12]

Στον τομέα της Γεωμετρίας γεννήθηκαν κάποιες καινοτόμες για την εποχή τους ιδέες, οι οποίες οφείλονταν στην νέα δυνατότητα, που παρείχαν στο χρήστη τα λογισμικά Δυναμικής Γεωμετρίας, για άμεσο χειρισμό των γεωμετρικών σχεδίων.

Τα λογισμικά αυτά, του επιτρέπουν να αντιληφθεί τις γεωμετρικές ιδέες σαν τη μελέτη των αμετάβλητων ιδιοτήτων των σχεδίων, με το σύρσιμο των συστατικών τους σε οποιοδήποτε μέρος της οθόνης: μια γεωμετρική ιδιότητα τώρα αποτελεί την

[12] Balacheff & Kaput, 1996, 475.

περιγραφή ενός γεωμετρικού φαινομένου, το οποίο μπορεί να γίνει αντικείμενο παρατήρησης και μελέτης σε αυτούς τους νέους τομείς πειραματισμού.

Στις αρχές της δεκαετίας του ’70, το περιβάλλον με γλώσσα Logo ήταν το πρώτο που δημιούργησε μια γέφυρα ανάμεσα στη Γεωμετρία και τη γραφική αναπαράσταση μέσω υπολογιστή. Ο χρήστης καλούνταν να εργαστεί μέσα σε μια συμβολική γλώσσα, η οποία από μόνη της είχε μια σημαντική πολυπλοκότητα. Η Logo είναι πλήρως ορισμένη από ένα σύνολο αρχικών ενεργειών και αντικειμένων (π.χ. αριθμοί και λίστες) καθώς και από το συντακτικό της, το οποίο καθορίζει τους επιτρεπτούς συνδυασμούς ενεργειών και χειρισμών. Ο χρήστης μπορεί να μετατρέψει ένα οργανωμένο σύστημα αρχικών ενεργειών (εντολών) σε ένα απλό σύμπλεγμα, συνδυάζοντάς τες σε μια διαδικασία (αλγόριθμο) η οποία μπορεί να λειτουργήσει σαν ενιαία εντολή.

Ακολούθως, με το περιβάλλον Geometric Supposer, έγινε ένα ακόμη κρίσιμο βήμα αφού αυτό χάρισε τη δυνατότητα διατήρησης οποιασδήποτε τροποποίησης πάνω σε μια ευκλείδεια κατασκευή χωρίς να θεωρείται αναγκαία η πλήρης αναθεώρηση των προδιαγραφών της.

Ωστόσο, η ολοκλήρωση της σύνδεσης ανάμεσα στη Γεωμετρία και το πειραματικό πεδίο καθώς και τα σχέδια γεωμετρικών σχημάτων, που αναζητούσαν τα περιβάλλοντα που αναφέραμε, επιτεύχθηκαν από τη Γεωμετρία του Cabri, στα μέσα της δεκαετίας του ‘80 και στη συνέχεια από το Geometers Sketchpad. Αυτά τα περιβάλλοντα Δυναμικής Γεωμετρίας είναι πλήρως ορισμένα από ένα συγκεκριμένο σύνολο αντικειμένων (σημείο, ευθεία, ευθύγραμμο τμήμα, κ.λπ) και από δευτερεύουσες ενέργειες (π.χ. σχεδίαση κάθετης ευθείας δοθέντος ενός σημείου εκτός αυτής και μιας άλλης ευθείας). Διαθέτουν ένα οργανωμένο σύνολο από αρχικές ενέργειες (εντολές), οι οποίες μπορούν να οργανωθούν σε ένα ενιαίο σύμπλεγμα εντολών (Μακρο-εντολές). Ο χρήστης μπορεί να χειριστεί τα σχέδια, που παράγονται στην επιφάνεια της οθόνης, με τις λειτουργίες «dragging» (σύρσιμο) και «grabbing» (τράβηγμα) γύρω από οποιοδήποτε σημείο, το οποίο διαθέτει επαρκή βαθμό ελευθερίας.

2.3.2 Διάκριση όρων «σχέδιο» και «σχήμα»

Η Γεωμετρία που διδάσκεται στο σχολείο φαίνεται να μην διαχωρίζει ουσιαστικά τους όρους σχέδιο και σχήμα.

Η Colette Laborde κάνει μια σημαντική διάκριση ανάμεσα στους όρους **σχέδιο** και **σχήμα**: Το σχέδιο αναφέρεται στην υλική οντότητα και είναι περιορισμένο στον χώρο της εμπειρίας ενώ το σχήμα αναφέρεται σε ένα θεωρητικό αντικείμενο το οποίο διαθέτει χωρικές και σχεδιαστικές ιδιότητες (Jones, ό.π., 58).

Στα πλαίσια ενός συστήματος Δυναμικής Γεωμετρίας, ένα *σχέδιο* μπορεί να είναι μια παράθεση γεωμετρικών αντικειμένων, τα οποία μοιάζουν σε μεγάλο βαθμό με την επιδιωκόμενη κατασκευή.

Μπορεί δηλαδή ένα σχέδιο να είναι φτιαγμένο με τέτοιο τρόπο, ώστε να μοιάζει εμφανισιακά σωστό. Αντιθέτως, ένα σχήμα συμπεριλαμβάνει και τις σχέσεις μεταξύ των γεωμετρικών αντικειμένων και είναι κατασκευασμένο με τέτοιο τρόπο, ώστε να είναι αμετάβλητο, ακόμη και όταν κάποιο από τα βασικά αντικείμενα της κατασκευής του σύρεται προς κάποιο άλλο σημείο (λειτουργία «dragging»). Με λίγα λόγια, ένα σχήμα μπορεί να περάσει το «drag-test» που αναφέραμε και προηγουμένως (ό.π.).

Σύμφωνα με τον Jones (ό.π.), ο Hölzl τόνισε πως οι μαθητές μπορεί να «κολλήσουν» κάπου μεταξύ σχεδίου και σχήματος, γεγονός που οφείλεται στο ότι η διαδικασία επαλήθευσης, σε ένα περιβάλλον Δυναμικής Γεωμετρίας, καθορίζεται από τη λειτουργία συρσίματος (dragging). Επιπλέον, υποστηρίζει ότι όσο πιο ισχυρό είναι το εργαλείο του υπολογιστή, τόσο περισσότερη διδακτική προσπάθεια χρειάζεται για να εστιάσουν οι μαθητές στις σχετικές μαθηματικές σχέσεις.

2.3.3 Λειτουργία «σύρσιμο» (dragging)

Η λειτουργία «σύρσιμο» είναι ένα εργαλείο για τη δημιουργία πολλών διαφορετικών αναπαραστάσεων ενός συγκεκριμένου σχήματος, μέσω της συνεχούς μεταβολής του. Η λειτουργία αυτή δρα πάνω σε ένα σχέδιο, υπό την επίδραση ενός υπάρχοντος σχεδίου, με αποτέλεσμα να δημιουργείται στο ενδιάμεσο μια λειτουργία μεσολάβησης. Σύμφωνα με τον Hölzl, αυτή η μεσολαβούσα λειτουργία μπορεί να χρησιμοποιηθεί με τουλάχιστον δύο τρόπους:[13]

a) ως λειτουργία δοκιμής-ελέγχου, που εξετάζει αν μια κατασκευή έχει τις επιθυμητές ιδιότητες,
b) ως λειτουργία αναζήτησης-αναγνώρισης νέων ιδιοτήτων.

Έρευνες έχουν δείξει πως το σύρσιμο που επιτρέπουν τα λογισμικά Δυναμικής Γεωμετρίας συμβάλλει στο να συνειδητοποιήσουν οι μαθητές τη λογική ακολουθία μεταξύ κάποιων συγκεκριμένων ενεργειών και γεωμετρικών καταστάσεων. Ακόμη, ενισχύει τον σχηματισμό εικασιών και την ανάπτυξη της χωρικής τους αντίληψης (Nagy-Kondor, 2017, 49).

Το τελευταίο επιτυγχάνεται, σύμφωνα με τον Arzarello, χάρις τη δυνατότητα εξερεύνησης των διάφορων σχεδίων μέσω της μετακίνησής τους σε διάφορες θέσεις, εξετάζοντας τον τρόπο με τον οποίο οι μορφές αλλάζουν (ή δεν αλλάζουν), γεγονός που οδηγεί στο να ανακαλύψουν οι μαθητές τις αμετάβλητες ιδιότητες των σχημάτων που μελετούν (Arzarello κ.ά., 2002, 2).

[13] Nagy-Kondor, 2017, 49

Η δυνατότητα συρσίματος (dragging) προσφέρει ανατροφοδότηση στους μαθητές, τη στιγμή που βρίσκονται στη φάση των ανακαλύψεων (ό.π.). Τα βήματα που ακολουθούνται σε μια γεωμετρική κατασκευή μπορούν να ανακληθούν οποιαδήποτε στιγμή και συνεπώς η κατασκευή μπορεί να αναλυθεί με τέτοιο τρόπο, ώστε να εντοπιστούν λογικά λάθη και λανθασμένες υποθέσεις (Nagy-Kondor, ό.π., 49).

Αυτές οι πρακτικές που υποστηρίζονται από τον υπολογιστή, μπορούν να περιγραφούν στα πλαίσια μιας διαδικασίας γνωστικής εξέλιξης του χρήστη: της μετάβασης από το στάδιο της διαίσθησης στο στάδιο της θεωρίας και αντίστροφα. Στην πραγματικότητα, υπάρχουν δύο βασικές γνωστικές φάσεις, οι οποίες μπορούν να κατηγοριοποιηθούν ανάλογα με την εκάστοτε κατάσταση (Arzarello κ.ά., ό.π., 2):

- **Διαδικασία ανόδου**: Μετάβαση από τη φάση του σχεδίου στη φάση της θεωρίας, έτσι ώστε να εξερευνηθεί ελεύθερα μια κατάσταση ψάχνοντας για κανονικότητες, αμετάβλητες ιδιότητες κ.ά.

- **Διαδικασία καθόδου**: Μετάβαση από τη φάση της θεωρίας στη φάση του σχεδίου, έτσι ώστε να αποδειχθούν έγκυρες ή να διαψευσθούν οι εικασίες, να ελεγχθούν οι ιδιότητες, κ.ά.

Οι διαδικασίες ανόδου και καθόδου που εμφανίζονται με τις πρακτικές της λειτουργίας συρσίματος, αποκαλύπτουν γνωστικές μεταβάσεις από το επίπεδο της αντίληψης στο θεωρητικό επίπεδο και πίσω στη μαθηματική δραστηριότητα των μαθητών (ό.π.).

Η λειτουργία «dragging» μπορεί να χρησιμοποιηθεί με πολλούς διαφορετικούς τρόπους από τους μαθητές, ανάλογα με τον σκοπό που θέλουν να επιτύχουν κατά την επίλυση ενός ανοιχτού προβλήματος. Παρακάτω αναφέρουμε τις διάφορες μορφές συρσίματος, όπως κατηγοριοποιήθηκαν και παρουσιάζονται στον Arzarello (ό.π.):

1) **Σύρσιμο περιπλάνησης**: Μετακίνηση των βασικών σημείων στην οθόνη τυχαία, χωρίς κάποιο σχέδιο, προκειμένου να ανακαλυφθούν ενδιαφέρουσες μορφές ή κανονικότητες στα σχέδια.

2) **Δεσμευμένο σύρσιμο**: Κίνηση ενός ημι-συρόμενου σημείου (σημείο που συνδέεται με ένα αντικείμενο και μπορεί να κινηθεί αλλά μόνο μαζί με το αντικείμενο στο οποίο ανήκει).

3) **Καθοδηγούμενο σύρσιμο**: Σύρσιμο των βασικών σημείων ενός σχεδίου προκειμένου να του δοθεί μια ιδιαίτερη μορφή.

4) **Σύρσιμο εικονικού γεωμετρικού τόπου**: Μετακίνηση ενός βασικού σημείου έτσι ώστε το σχέδιο να διατηρεί μια αποκαλυφθείσα ιδιότητα. Το κινούμενο σημείο ακολουθεί μια πορεία, την οποία όμως οι χρήστες δεν αντιλαμβάνονται, ο γεωμετρικός τόπος δεν είναι ορατός και «δεν μιλά» στους μαθητές, οι οποίοι δεν συνειδητοποιούν πάντα ότι σέρνουν κατά μήκος ενός γεωμετρικού τόπου.

5) **Σύρσιμο γραμμών**: Σχεδιασμός νέων σημείων κατά μήκος μιας γραμμής προκειμένου να διατηρηθεί η κανονικότητα του σχήματος.

6) **Συνδεμένο σύρσιμο**: Σύνδεση της κίνησης ενός σημείου με την κίνηση ενός άλλου γεωμετρικού αντικειμένου.

7) **Δοκιμή συρσίματος** (dragging test): Μετακίνηση των συρόμενων ή ημι-συρόμενων σημείων προκειμένου να φανεί εάν το σχέδιο διατηρεί ή όχι τις ιδιότητες βάσει των οποίων κατασκευάστηκε: αν περνά τη δοκιμή τότε κατασκευάστηκε σύμφωνα με τις επιθυμητές γεωμετρικές ιδιότητες, διαφορετικά όχι.

Οι μορφές συρσίματος σε ένα δυναμικό περιβάλλον,[14] συνδέονται με τις φάσεις ανόδου και καθόδου και με τις γνωστικές διεργασίες των μαθητών σε δραστηριότητες που έχουν ως στόχους τη διερεύνηση (σύρσιμο περιπλάνησης, δεσμευμένο και καθοδηγούμενο), την ανακάλυψη και τη διατύπωση μιας υπόθεσης (σύρσιμο εικονικού γεωμετρικού τόπου), τον έλεγχο της υπόθεσης (συνδεμένο σύρσιμο), την επικύρωση της υπόθεσης (δοκιμή συρσίματος).

Το σύρσιμο περιπλάνησης, το δεσμευμένο, και το καθοδηγούμενο ανήκουν στη φάση Ανόδου. Το σύρσιμο εικονικού γεωμετρικού τόπου, μπορεί να θεωρηθεί ως σύρσιμο περιπλάνησης και αποτελεί την αφετηρία της μετάβασης από τη διαδικασία Ανόδου στη διαδικασία Καθόδου. Το σύρσιμο γραμμών, ακολουθεί το σύρσιμο του πλαστού γεωμετρικού τόπου και είναι μέρος της διαδικασίας μετάβασης προς τη φάση Καθόδου (ό.π.).

2.3.4 Γεωμετρικές κατασκευές σε περιβάλλοντα Δυναμικής Γεωμετρίας[15]

Μια γεωμετρική κατασκευή αποτελείται από μια διαδικασία (αλληλουχία ενεργειών) η οποία, μέσω της χρήσης συγκεκριμένων εργαλείων και σύμφωνα με συγκεκριμένους κανόνες, παράγει ένα σχέδιο. Μια κατασκευή θεωρείται σωστή, αν τα εργαλεία έχουν χρησιμοποιηθεί σύμφωνα με καθορισμένους κανόνες.

Κατά τον Balacheff, η διαδοχικότητα στις ενέργειες που απαιτούνται για την παραγωγή ενός σχήματος σε ένα δυναμικό περιβάλλον (DGE), παρουσιάζει μια αυστηρή σειρά βημάτων που πρέπει να γίνουν για μια γεωμετρική κατασκευή. Αν η κατασκευή γινόταν με χαρτί και μολύβι, η αυστηρότητα της σειράς αυτής δεν θα ήταν αναμενόμενη και δεν θα είχε καμία απολύτως σημασία για τους περισσότερους χρήστες.

[14] Arzarello, 2002, 2.
[15] Jones, 2001, 59.

Για παράδειγμα σε ένα περιβάλλον όπως αυτό του λογισμικού Geogebra (το οποίο θα δούμε αναλυτικά στη συνέχεια), ένα ευθύγραμμο τμήμα AB προσανατολίζεται (ορίζεται) με τον τρόπο αυτό, επειδή το άκρο του Α δημιουργήθηκε πριν από το άκρο του Β.

Η σειρά των βημάτων μιας κατασκευής, λοιπόν, έχει νόημα σε ένα περιβάλλον Δυναμικής Γεωμετρίας, σε αντίθεση με την αντίστοιχη κατασκευή χρησιμοποιώντας χαρτί και μολύβι, στην οποία τα γεωμετρικά αντικείμενα έτσι κι αλλιώς δεν έχουν προσανατολισμό, εκτός κι αν αυτό ορίζεται ρητά.

Για την κατασκευή ενός περίπλοκου σχήματος, η διαδοχικότητα στην οργάνωση των βημάτων δημιουργεί μια ιεραρχία από σχέσεις εξάρτησης, αφού κάθε μέρος της κατασκευής βασίζεται σε κάτι που έχει δημιουργηθεί νωρίτερα από αυτό. Σύμφωνα με τον Hoyle, το γεγονός αυτό θα μπορούσε να αποτελεί πηγή σύγχυσης για τους μαθητές, αφού σε ένα περιβάλλον Δυναμικής Γεωμετρίας, οποιαδήποτε ιεραρχία σχέσεων μεταξύ των κατασκευών έχει δημιουργηθεί, δεν μπορεί να τροποποιηθεί χωρίς την αναίρεση πολλών ενεργειών από αυτές που έχουν γίνει ή ακόμη και την έναρξη ολόκληρης της κατασκευής από την αρχή. Συνεπώς, οι μαθητές θα πρέπει να συνειδητοποιήσουν αυτήν τη λειτουργική εξάρτηση, προκειμένου να είναι επιτυχείς σε δραστηριότητες που αφορούν μη τετριμμένες γεωμετρικές κατασκευές και τις οποίες δημιουργούν σε ένα περιβάλλον Δυναμικής Γεωμετρίας.

2.3.5 Περιβάλλοντα Δυναμικής Γεωμετρίας και Οπτικοποίηση (Visualization)

Το λογισμικό Δυναμικής Γεωμετρίας ως εργαλείο επίδειξης στην τάξη, βοηθά τους μαθητές να αντιληφθούν τι μπορεί να «κρύβεται» πίσω από μια γεωμετρική κατασκευή.

Σύμφωνα με τον Morrow (1997, 47), η οπτικοποίηση είναι ένα ισχυρό εργαλείο για την επίλυση γεωμετρικών προβλημάτων. Το λογισμικό Δυναμικής Γεωμετρίας συμβάλλει στη διαδικασία οπτικοποίησης σε όλες τις τάξεις των Μαθηματικών και όχι μόνο στη μελέτη της Γεωμετρίας. Οι μαθητές μπορούν να χρησιμοποιήσουν τα εργαλεία του δυναμικού λογισμικού για να κατασκευάσουν, να διορθώσουν την κατασκευή τους, να την επανεξετάσουν και να βλέπουν συνεχώς ποικίλα γεωμετρικά σχεδιαγράμματα. Πέρα από το γεγονός ότι η οπτικοποίηση είναι από μόνη της ένα πολύ ισχυρό εργαλείο για την επίλυση προβλημάτων, η παρεχόμενη δυνατότητα στους μαθητές να μπορούν να τροποποιούν στιγμιαία τις δικές τους οπτικές αναπαραστάσεις, προσθέτει μια καινούργια δυναμική διάσταση, οι εφαρμογές της οποίας μπορούν να γίνουν αντιληπτές.

Η δυναμική οπτικοποίηση αναφέρεται στην ευρεία χρήση αυτού του εργαλείου επίλυσης προβλημάτων.

2.4 Δυναμική Γεωμετρία στην Εκπαίδευση

Όπως σημειώνεται από τους Chazan και Yerushalmy, οι εκπαιδευτικοί χρησιμοποιούν προγράμματα γεωμετρικών κατασκευών, προσπαθώντας να δημιουργήσουν για τους μαθητές περιβάλλοντα πειραματισμού, όπου ενθαρρύνεται η συνεργατική μάθηση και η διερεύνηση. Αυτή η προσπάθεια εξέλιξης στην Μαθηματική εκπαίδευση ενισχύεται από μια φιλική προς τον χρήστη (μαθητή) διεπαφή και την δυνατότητα που του παρέχει το σύστημα για άμεσο χειρισμό των γεωμετρικών αντικειμένων (Balacheff & Kaput, ό.π., 477).

Τα πιο συνηθισμένα κλασικά προβλήματα και οι δραστηριότητες, που παρουσιάζονται σε μια τάξη, επιλύονται χάρις την αποτελεσματικότητα των περιβαλλόντων Γεωμετρίας που μοιάζουν με το Cabri, ενώ την ίδια στιγμή τα προγράμματα αυτά δίνουν τη δυνατότητα επίλυσης προβλημάτων που μέχρι πρότινος, δεν περιλαμβάνονταν στο πεδίο των κατασκευών με χαρτί και μολύβι. Για παράδειγμα, η κατασκευή μιας ευθείας που διέρχεται από δοσμένο σημείο, με τέτοιο τρόπο ώστε να είναι παράλληλη σε μια άλλη δοθείσα ευθεία, γίνεται χρησιμοποιώντας απλώς τη συμμετρία των σημείων (ό.π.).

Ένας ακόμη διδακτικός στόχος της Δυναμικής Γεωμετρίας είναι η βελτίωση του επιπέδου δράσης και του γεωμετρικού συλλογισμού των μαθητών, έτσι ώστε να συνειδητοποιήσουν ότι το αντικείμενο μελέτης δεν είναι τα επιμέρους τμήματα μιας γεωμετρικής κατασκευής, αλλά η αλληλουχία μεταξύ των τμημάτων αυτών, ο συνδυασμός των οποίων μας δίνει το τελικό σχήμα. Έτσι, ο μαθητής μπορεί να εξετάσει τις ομοιότητες και τις διαφορές μεταξύ των κατασκευών και πλέον δεν είναι αναγκασμένος να αποδέχεται εξ αρχής τη μαθηματική εγκυρότητα μιας δοσμένης κατασκευής (ό.π.).

Σύμφωνα με τους Goldenberg και Cuoco, παραμένει ακόμη άγνωστο το πώς οι μαθητές συλλαμβάνουν τις γεωμετρικές ιδέες μέσα από την παρατήρηση σχημάτων, τα οποία κινούνται περίπλοκα στην επιφάνεια της οθόνης ενός περιβάλλοντος Δυναμικής Γεωμετρίας. Ωστόσο, το σημαντικό είναι πως το υπολογιστικό περιβάλλον επηρεάζει την ανατροφοδότηση που παρέχεται στον χρήστη, καθώς και τις πιθανές ενέργειές του για την επίλυση ενός προβλήματος. Μια δραστηριότητα που επιλύεται με χρήση περιβάλλοντος Δυναμικής Γεωμετρίας είναι πολύ πιθανόν να απαιτεί διαφορετικές στρατηγικές από ότι αν λυνόταν απλά με χαρτί και μολύβι (Jones, ό.π., 58).

Επιπλέον, ανοιχτή ερώτηση παραμένει το πώς οι μαθητές μπορούν να διακρίνουν τα θεμελιώδη χαρακτηριστικά της Γεωμετρίας μέσα από λειτουργίες που είναι δυνατές, χάρις τον ειδικό σχεδιασμό των περιβαλλόντων Δυναμικής Γεωμετρίας (DGE) (ό.π.).

2.5 Ο αντίκτυπος της Τεχνολογίας στη Μαθηματική Εκπαίδευση[16]

Έρευνες έχουν δείξει πως η αξιοποίηση της Τεχνολογίας στη διδασκαλία των Μαθηματικών έχει θετικό αντίκτυπο στη Μαθηματική εκπαίδευση για τους εξής δύο λόγους:

α) Διευκολύνεται ο χειρισμός των παραδοσιακών εργαλείων, η δημιουργία μαθηματικών αναπαραστάσεων καθώς και η σύνδεση μεταξύ αυτών των δύο.
β) Δίνεται η δυνατότητα στον χρήστη (μαθητή) να χειρίζεται άμεσα τα μαθηματικά αντικείμενα και τις μαθηματικές σχέσεις.

Η διδασκαλία της Γεωμετρίας δεν γίνεται πλέον με τον παραδοσιακό τρόπο. Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι τα περιβάλλοντα Δυναμικής Γεωμετρίας επιτρέπουν στον χρήστη (μαθητή) να προγραμματίσει τις συνέπειες των κατασκευών του και των παραλλαγών που προκαλεί η αλλαγή παραμέτρων σε αυτές και στη συνέχεια να τις "τρέξει" στο πρόγραμμα για να δημιουργήσει δυναμικές κινούμενες εικόνες. Όλα αυτά έχουν ως αποτέλεσμα τη δημιουργία μιας καινούργιας συλλογής φαινομένων, φαινόμενα και τεχνικές που φαίνεται να διασταυρώνονται κάπου μεταξύ Γεωμετρίας και Τοπολογίας και τα οποία αποτελούν ένα εξαιρετικά ενδιαφέρον αντικείμενο μελέτης.

Οι ιδιαίτερες δυνατότητες που παρέχουν τα Μαθηματικά με χρήση υπολογιστή, οι οποίες πολύ απλά δεν θα μπορούσαν να υπάρχουν πέρα από τις δυνατότητες του υπολογιστή, αυξάνουν τη σημασία ορισμένων ιδεών των παραδοσιακών Μαθηματικών, όπως η τοπολογία σημείων, ενώ άλλες μαθηματικές ιδέες όπως η διάσταση γενικεύονται σε νέες κατευθύνσεις (π.χ. κλασματικές διαστάσεις).

Έτσι, καταλήγουμε στο συμπέρασμα πως ο αντίκτυπος της Τεχνολογίας στον τομέα των Μαθηματικών και στο πρόγραμμα σπουδών, συνεχίζει να εμβαθύνει αλλάζοντας τη φύση των αντικειμένων μελέτης και τον τρόπο με τον οποίο αυτά χρησιμοποιούνται για την κατανόηση του κόσμου.

Πέρα όμως από το γεγονός ότι αλλάζει η ουσία του προγράμματος σπουδών, αλλάζει και η παγκόσμια οργάνωσή του. Η πρόσβαση σε σημαντικές μαθηματικές ιδέες μπορεί να διευρυνθεί, για να συμπεριλάβει ένα ευρύτερο δείγμα του πληθυσμού των μαθητών, καθώς πλέον οι ιδέες αυτές μπορούν να τους παρουσιαστούν σε πολύ νεαρότερη ηλικία από ότι συνέβαινε παλαιότερα. Αυτό επιτυγχάνεται αν αξιοποιηθούν προσεκτικά οι δυνατότητες που παρέχουν τα δυναμικά προγράμματα για: άμεσο χειρισμό των αναπαραστάσεων του υπολογιστή, δημιουργία συσχετισμών με την καθημερινή εμπειρία και παροχή ποικίλων επιπέδων διδακτικής υποστήριξης.

Ως εκ τούτου, αμφισβητούνται άμεσα οι παραδοσιακές προαπαιτούμενες γνώσεις, που βασίζονται στην υπολογιστική ικανότητα, όπως και οι παραδοχές σχετικά με το

[16] Balacheff & Kaput, 1996, 475.

ποιοι μαθητές μπορούν να μάθουν Μαθηματικά αλλά και το εύρος της ύλης με την οποία δύνανται να ασχοληθούν.

Συνεπώς, νέοι βαθμοί ελευθερίας είναι διαθέσιμοι στο πρόγραμμα σπουδών και στη διδακτική σχεδίαση. Τέτοιες αλλαγές δεν αφορούν μόνο τα σχολεία και τη σχολική εκπαίδευση, αλλά και τη σχέση μεταξύ του σχολείου και της ευρύτερης κοινωνίας, τη σχέση ανάμεσα στο σχολείο και την εκπαίδευση, ιδιαίτερα αφού η επανάσταση της συνδεσιμότητας και οι σχετικές αλλαγές στην τεχνολογική υποδομή αλλάζουν και τις απαιτούμενες οικονομικές παροχές για την εκπαίδευση.

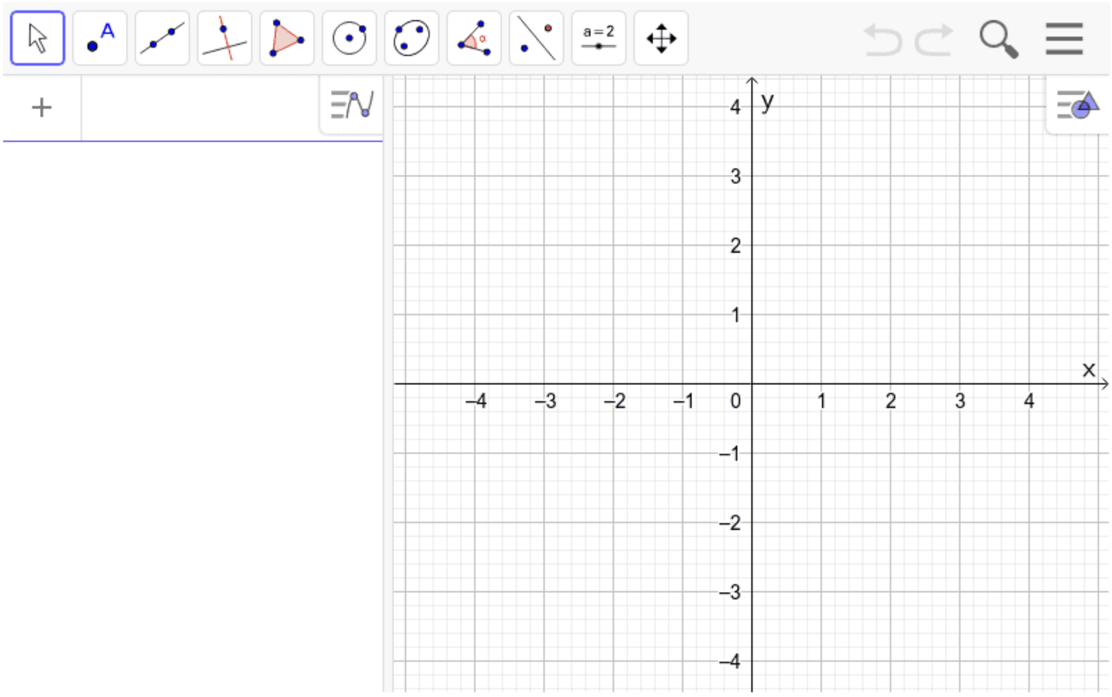
2.6 Το περιβάλλον Geogebra

Τα περιβάλλοντα Δυναμικής Γεωμετρίας (DGS), που αναφέραμε και νωρίτερα, όπως το Cabri ή το Cinderella και τα συστήματα Υπολογιστικής Άλγεβρας (CAS), όπως τα Mathematica, Maple, Derive, έχουν επηρεάσει σε μεγάλο βαθμό τη μαθηματική εκπαίδευση (Hohenwarter & Fuchs, ό.π., 1).

Το λογισμικό Geogebra που πραγματεύεται η εργασία αυτή, ουσιαστικά συνδυάζει τις δυνατότητες των συστημάτων DGS και CAS.

GeoGebra
Dynamic Mathematics for Everyone

Εικ. 2. Λογότυπο του λογισμικού Geogebra



Εικ. 3. Το περιβάλλον του λογισμικού Geogebra

2.6.1 Ιστορική Αναδρομή[17]

Το 1997, ο Karl Fuchs έκανε μια διάλεξη πάνω στη χρήση της TI-92 αριθμομηχανής στη μαθηματική εκπαίδευση, στο Πανεπιστήμιο του Salzburg. Αυτή η αριθμομηχανή, προσέφερε τις δυνατότητες των DGS και CAS, ωστόσο ήταν δύο τελείως ξεχωριστά προγράμματα. Την περίοδο εκείνη, ένας από τους μαθητές του Fuchs, ο Markus Hohenwarter, πρότεινε μια στενότερη σύνδεση μεταξύ των δυνατοτήτων οπτικοποίησης των CAS και της δυναμικής μεταβλητότητας των DGS.

Το 2001, ο Hohenwarter ξεκίνησε να δουλεύει, στα πλαίσια της διπλωματικής του εργασίας, το GeoGebra, ένα λογισμικό Δυναμικής Γεωμετρίας και Άλγεβρας. Στόχος αυτού του έργου ήταν, να αναπτυχθεί ένας, εντελώς καινούργιος, τύπος εργαλείου για τη μαθηματική δευτεροβάθμια εκπαίδευση.

Το Geogebra έχει ήδη λάβει αρκετά διεθνή βραβεία εκπαιδευτικού λογισμικού. Ενδεικτικά αναφέρουμε τα εξής: European Academic Software Award 2002 (Ronneby, Sweden), Learnie Award 2003 (Vienna, Austria), digita 2004 (Cologne, Germany) και Comenius 2004 (Berlin, Germany).

[17] Hohenwarter & Fuchs, 2004, 1.

2.6.2 Δυνατότητες του λογισμικού Geogebra

Το Geogebra βασίζεται στην Προβολική Ευκλείδεια Γεωμετρία στο πραγματικό επίπεδο (δηλ. στον δισδιάστατο Ευκλείδειο χώρο). Οι εξισώσεις είναι διευρυμένες και απλοποιημένες συμβολικά και όπως συμβαίνει στο μάθημα της Γλώσσας, όπου υπάρχει γραμματική και συντακτικό, έτσι και η γλώσσα του Geogebra έχει μια ιδιαίτερη γραμματική και συγκεκριμένο τρόπο σύνταξης των αριθμητικών εκφράσεων.

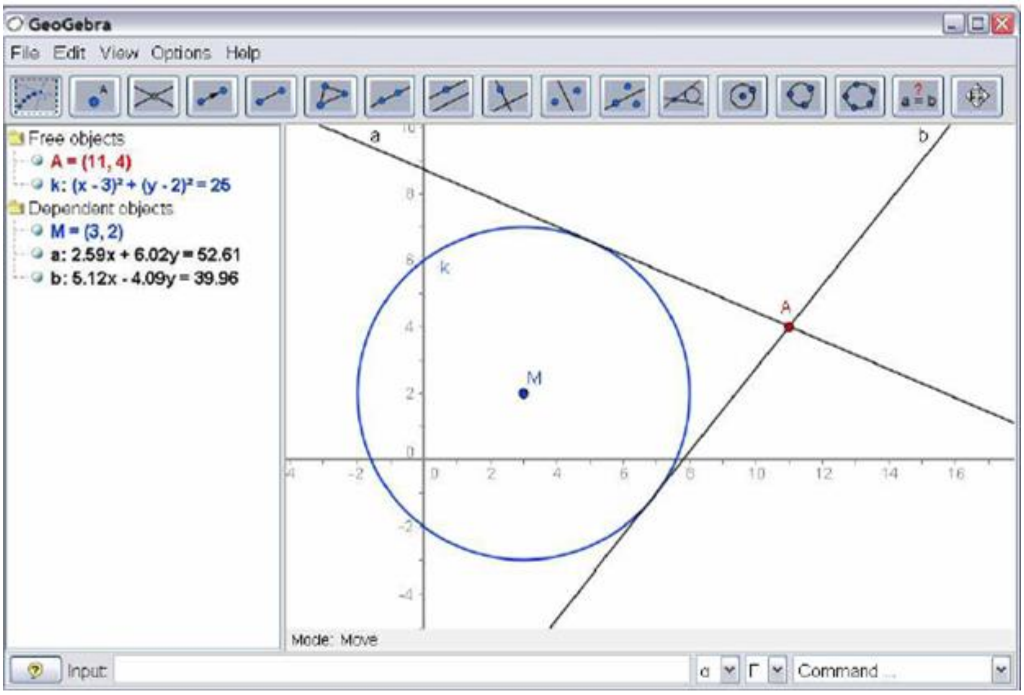
Ένα επιθυμητό χαρακτηριστικό στα περιβάλλοντα Δυναμικής Γεωμετρίας είναι η απαίτηση της «συνέχειας» (continuity). Δηλαδή, κατά τη μεταβολή κάποιων στοιχείων μιας κατασκευής (π.χ. κατά το σύρσιμο) θέλουμε όλα τα στοιχεία της κατασκευής να μεταβάλλονται με τρόπο συνεχή (ομαλό). Όταν αυτή η συνέχεια διαταράσσεται, τότε έχουμε κάποιες ανεπιθύμητες «καταστάσεις αναπήδησης» (jumping situations) και τα αντίστοιχα αντικείμενα τα χαρακτηρίζουμε ως «αντικείμενα με αναπήδηση». Στα περισσότερα συστήματα Δυναμικής Γεωμετρίας συναντά κανείς, σε συγκεκριμένες κατασκευές, αντικείμενα με αναπήδηση, δηλαδή αντικείμενα που κατά το σύρσιμο κάνουν άλμα σε κάποια άλλη θέση.

Για παράδειγμα, τα σημεία τομής δύο κωνικών τομών μπορεί να μετατραπούν απότομα στο Cabri, όταν μια έκλειψη γίνει υπερβολή. Στο Geogebra, αυτό το πρόβλημα συνέχειας αντιμετωπίζεται από μια εξελιγμένη ευρετική προσέγγιση, η οποία περιορίζει τα αντικείμενα με αναπήδηση.

Για την παραγώγιση και την ολοκλήρωση συναρτήσεων με μια μεταβλητή, έχει ενσωματωθεί μέσα στο Geogebra ένα σύστημα ανοιχτού κώδικα υπολογιστικής Άλγεβρας, το JSCL (ό.π., 4).

Το λογισμικό Geogebra, είναι ένα διαδραστικό περιβάλλον Γεωμετρίας το οποίο προσφέρει και δυνατότητα εισαγωγής αλγεβρικών στοιχείων, όπως για παράδειγμα εισαγωγή εξισώσεων. Απευθύνεται σε μαθητές ηλικίας από 10 έως 18 ετών και σε καθηγητές τις Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης. Το πρόγραμμα αυτό ενθαρρύνει τους μαθητές να προσεγγίσουν τα Μαθηματικά με έναν πειραματικό τρόπο.

Για παράδειγμα, είναι δυνατόν να διερευνηθούν οι παράμετροι της εξίσωσης ενός κύκλου, σύροντας τον κύκλο με το ποντίκι του υπολογιστή. Από την άλλη, οι μαθητές μπορούν να χειριστούν την εξίσωση του κύκλου απευθείας και να δουν τις αλλαγές να συμβαίνουν στο παράθυρο των γεωμετρικών κατασκευών (ό.π., 2).



Εικ. 4. Κύκλος με δύο εφαπτόμενές του.

Το διαδραστικό πρωτόκολλο κατασκευής είναι πραγματικά σημαντικό. Οι Bender και Schreiber, τόνισαν πως η περιγραφή μιας γεωμετρικής κατασκευής αποτελεί την προ-θεωρητική βάση, για την κατασκευή ενός αλγορίθμου. Το πρωτόκολλο κατασκευής του Geogebra, δίνει τη δυνατότητα να ξαναγίνει μια κατασκευή οποιαδήποτε στιγμή, να εισάγει ο χρήστης νέες εντολές ή να αλλάξει την σειρά αυτών που ήδη υπάρχουν. Ωστόσο, οποτεδήποτε οι μαθητές προσθέτουν ή διαγράφουν εντολές, θα πρέπει να συνειδητοποιούν και τις κατασκευαστικές σχέσεις εξάρτησης μεταξύ των διάφορων γεωμετρικών αντικειμένων (ό.π.).

Τα κυριότερα αντικείμενα του λογισμικού Geogebra είναι σημεία, διανύσματα, ευθύγραμμα τμήματα, πολύγωνα, ευθείες γραμμές όλες οι κωνικές τομές και συναρτήσεις με άγνωστο x. Με το Geogebra, οι δυναμικές κατασκευές μπορούν να γίνουν όπως σε οποιοδήποτε άλλο σύστημα Δυναμικής Γεωμετρίας. Αυτές οι κατασκευές μπορούν να εναλλαχθούν δυναμικά με το σύρσιμο ελεύθερων αντικειμένων. Επιπλέον, είναι δυνατόν να εισάγει ο χρήστης, απευθείας, συντεταγμένες σημείων ή διανυσμάτων, εξισώσεις ευθειών, κωνικών τομών ή συναρτήσεων και αριθμούς ή γωνίες (ό.π.).

Ως εκ τούτου, από την αρχή του το λογισμικό σχεδιάστηκε για να χρησιμοποιηθεί σε σχολεία. Η αντιμετώπιση προβλημάτων δεν πρέπει να επηρεαστεί από τις μεταφράσεις που προκαλεί το σύστημα. Οι χειρισμοί θα πρέπει να γίνονται με έναν, όσο το δυνατόν, πιο οικείο για τους μαθητές τρόπο. Μεγάλες προσπάθειες έγιναν ώστε να καταστεί εφικτή η εισαγωγή σημειώσεων στα σχολεία. Για παράδειγμα, μια ευθεία γ μπορεί να εισαχθεί στο σύστημα ως εξής γ: $3x + 4y = 7$ ή ένας κύκλος c ως c: $(x - 3)^2 + (y + 2)^2 = 25$ (ό.π.).

Ακόμη, υπολογισμοί με γεωμετρικά αντικείμενα όπως σημεία και διανύσματα είναι εφικτοί. Για παράδειγμα, το κέντρο βάρους ενός τριγώνου με κορυφές τα σημεία Α, Β και Γ μπορεί να εισαχθεί με τον εξής τρόπο: S = (A + B + Γ)/3. Επιπλέον το Geogebra προσφέρει πολλές ισχυρές εντολές ξεκινώντας από την κλίση μιας ευθείας γραμμής μέχρι την παραγώγιση και ολοκλήρωση μιας συνάρτησης (ό.π., 3).

Συνοπτικά, το λογισμικό Geogebra, όπως και άλλα λογισμικά Δυναμικής Γεωμετρίας:

- Μπορεί να χρησιμοποιηθεί ως ακριβής χάρακας και διαβήτης.
- Επιτρέπει στους μαθητές να απεικονίζουν σχέσεις μεταξύ των αντικειμένων ενός γεωμετρικού σχήματος.
- Βοηθά τους μαθητές να κατανοήσουν τις έννοιες μέσω των κατασκευών. Σε αυτό συντελεί ιδιαίτερα η ακρίβεια των σχημάτων.
- Έχει τη δυνατότητα να κρύβει τις περιττές λεπτομέρειες του σχήματος και να εκτελεί δύσκολες κατασκευές απλοποιώντας έτσι τα βήματα με τη βοήθεια των κατάλληλων εργαλείων του λογισμικού.

Apps / Features	**Scientific**	**Graphing**	**Geometry**	**3D**	**CAS**	**Classic**
Numeric calculations	✓	✓	✓	✓	✓	✓
Function operations	✓	✓	✓	✓	✓	✓
Fraction operations	✓	✓	✓	✓	✓	✓
Graphing		✓	✓	✓	✓	✓
Sliders		✓	✓	✓	✓*	✓
Vectors and matrices		✓	✓	✓	✓*	✓
Table of values		✓			✓	✓
Geometric constructions			✓	✓		✓
3D graphing				✓		✓
Symbolic calculations				✓	✓	✓
Derivatives & integrals				✓	✓	✓
Equation solving				✓	✓	✓

* coming soon

Εικ. 5. Οι δυνατότητες του λογισμικού Geogebra

Το Geogebra είναι πολύγλωσσο, όχι μόνο ως προς το μενού του αλλά και ως προς τις εντολές του. Για παράδειγμα η εντολή "intersect" (τομή) στα Αγγλικά, γίνεται "schneide" στα Γερμανικά και "interseccíon" στα Ισπανικά.

2.6.2.1 Δυναμικά Φύλλα Εργασίας[18]

Με το Geogebra, υπάρχει η δυνατότητα κατασκευής διαδραστικών HTML σελίδων (γι' αυτό ονομάζονται δυναμικά φύλλα εργασίας) οι οποίες μπορούν να χρησιμοποιηθούν με οποιονδήποτε περιηγητή διαδικτύου που υποστηρίζει την γλώσσα προγραμματισμού Java (π.χ. Internet Explorer, Mozilla Firefox, Netscape). Αυτά τα φύλλα εργασίας είναι εξ ολοκλήρου ανεξάρτητα από το πρόγραμμα αυτό καθ' αυτό, δηλαδή δεν χρειάζεται η εγκατάσταση του Geogebra στον υπολογιστή, προκειμένου να χρησιμοποιήσει κανείς αυτά τα φύλλα. Συνεπώς, το Geogebra είναι ένα εργαλείο για τη δημιουργία διαδραστικού περιεχομένου ηλεκτρονικής μάθησης.

Η αυτόνομη εφαρμογή μπορεί να χρησιμοποιηθεί σε οποιαδήποτε πλατφόρμα (π.χ. MS Windows, Unix, Linux, MacOs) και το Geogebra μπορεί να τρέξει κατευθείαν από το Internet, περιορίζοντας έτσι τις περίπλοκες εγκαταστάσεις ή τις διαδικασίες αναβάθμισης, δυνατότητα η οποία είναι πολύ χρήσιμη ειδικά σε σχολικά δίκτυα υπολογιστών.

2.6.3 Το Geogebra στα σχολεία

Το λογισμικό Geogebra είναι ένα πολύ ευέλικτο εργαλείο για τη μαθηματική εκπαίδευση στα σχολεία. Στη διδασκαλία των Μαθηματικών μπορεί να χρησιμοποιηθεί με πολλούς διαφορετικούς τρόπους:[19]

1) **Geogebra για παρουσίαση και οπτικοποίηση.**

   Ακόμη και στην παραδοσιακή διδασκαλία, το λογισμικό ηλεκτρονικών υπολογιστών έχει τη θέση του. Στην ομιλία του σχετικά με τον ρόλο του στοχευμένου λογισμικού, ο Becker αναφέρεται στην ιδέα του λογισμικού αυτού σαν ένα εργαλείο για παρουσίαση και οπτικοποίηση. Με αυτή την έννοια, το Geogebra είναι ένα λογισμικό με ευρεία κάλυψη, εξαιτίας των διαφορετικών του αναπαραστάσεων.

2) **Geogebra – ένα κατασκευαστικό εργαλείο**

   Το 1990, ο Karl Fuchs τόνισε τη σημασία της σχεδίασης με χρήση υπολογιστή και της σχεδίασης συστημάτων για τη διδασκαλία της κατασκευαστικής Γεωμετρίας με τη συμβολή της σύγχρονης τεχνολογίας. Αυτό που πρότεινε δεν ήταν η υποκατάσταση της παραδοσιακής διδασκαλίας αλλά η ενσωμάτωση νέων μεθόδων. Η ιδέα της χρήσης υπολογιστή θεμελιώθηκε. Το Geogebra έχει όλες τις προδιαγραφές που απαιτούνται για ένα λογισμικό σχεδίασης.

[18] Hohenwarter & Fuchs, 2004, 3.
[19] Ό.π..

3) **Geogebra και ανακαλυπτικά Μαθηματικά**

Οι υπολογιστές και το μαθηματικό λογισμικό έχουν προκαλέσει νέες βασικές ερωτήσεις σχετικά με τη διδασκαλία των Μαθηματικών. Οι μαθητές μπορούν να οργανώσουν τη γνώση μόνοι τους. Για παράδειγμα, οι Artigue και Lagrange αναφέρονται στη θετική επίδραση των συστημάτων της υπολογιστικής Άλγεβρας στη διδασκαλία των Μαθηματικών. Αυτή η πειραματική μορφή προστίθεται στην παραδοσιακή δασκαλοκεντρική μορφή διδασκαλίας. Το Geogebra μπορεί να χρησιμοποιηθεί σαν ένα πολύ σημαντικό εργαλείο για αυτήν την δοκιμασία. Μπορεί να συμβάλλει ώστε να δημιουργηθεί μια κατάλληλη ατμόσφαιρα μάθησης.

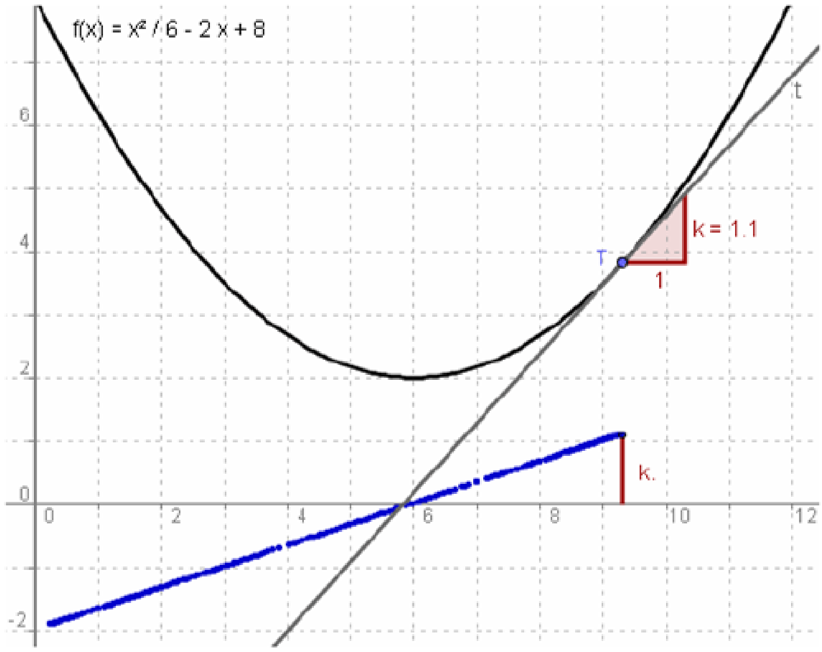
4) **Geogebra για την προετοιμασία διδακτικού υλικού**

Το Geogebra ενθαρρύνει τους δασκάλους ώστε να προετοιμάσουν υλικό για την εκπαιδευτική διαδικασία χρησιμοποιώντας το σαν ένα εργαλείο για συνεργασία, επικοινωνία και παρουσίαση. Αυτό έρχεται σε συμφωνία με τις ιδέες του Kerre για τις εκπαιδευτικές λειτουργίες των νέων μέσων.

Το λογισμικό Geogebra μπορεί να χρησιμοποιηθεί σε μαθητές ηλικίας 10 έως 18 ετών, όπως αναφέραμε και νωρίτερα, ξεκινώντας με απλές κατασκευές μέχρι και την ενσωμάτωση των συναρτήσεων. Ακόμη κι αν οι μαθητές εξερευνούν μόνοι τους ή σε ομάδες τα Μαθηματικά, ο δάσκαλος πρέπει να προσπαθεί να είναι σύμβουλος και να στηρίζει τους μαθητές του όποτε χρειάζονται βοήθεια. Τα αποτελέσματα των πειραματισμών των μαθητών με το Geogebra, θα πρέπει να αποτελούν τη βάση των συζητήσεων στη σχολική τάξη. Αυτό δίνει στους δασκάλους περισσότερο χρόνο να συγκεντρωθούν σε θεμελιώδεις ιδέες και μαθηματικούς συλλογισμούς (ό.π., 3).

Το ακόλουθο παράδειγμα δείχνει το δυναμικό φύλλο εργασίας όπου οι μαθητές μπορούν να ανακαλύψουν μόνοι τους τη λειτουργία της κλίσης μιας παραβολής. Τους δίνεται ένα αυθαίρετο σημείο T στο γράφημα, η εφαπτομένη t σε αυτό το σημείο και η κλίση της k. Τώρα καλούνται να διερευνήσουν ένα άλλο σημείο (X_T, k) με την x-συντεταγμένη του T και την αντίστοιχη κλίση k σαν y-συντεταγμένη. Σύροντας το σημείο T κατά μήκος του γραφήματος της παραβολής, ένα ίχνος της συνάρτησης κλίσης δημιουργείται πειραματικά. Έτσι οι μαθητές καλούνται να διαβάσουν την εξίσωση της συνάρτησης κλίσης χρησιμοποιώντας το πλέγμα συντεταγμένων (ό.π.).

Σχεδιάζοντας αυτήν την εξίσωση με το Geogebra, μπορούν εύκολα οι μαθητές να επαληθεύσουν τα συμπεράσματά τους.



Εικ. 4. Συνάρτηση κλίσης της: x^2 / 6 – 2x + 8

Αυτό λοιπόν είναι ένα παράδειγμα-κίνητρο για το γεωμετρικό μοντέλο της πρώτης παραγώγου. Εδώ η εφαπτομένη παρέχει τη βάση για συζήτηση σχετικά με το πρόβλημα της εφαπτομένης γραμμής στη συνέχεια (ό.π.).

Συνοψίζοντας, το λογισμικό Δυναμικής Γεωμετρίας, βοηθά τους δασκάλους να δημιουργήσουν μαθησιακά περιβάλλοντα, όπου οι μαθητές μπορούν να πειραματιστούν, να παρατηρήσουν τη σταθερότητα ή την απουσία σταθερότητας, δηλαδή τη μεταβλητότητα των μαθηματικών ιδιοτήτων και να δηλώσουν ή να επαληθεύσουν τις εικασίες τους πολύ πιο εύκολα σε σχέση με άλλα περιβάλλοντα υπολογιστών ή την πιο παραδοσιακή διδασκαλία με χαρτί και μολύβι. Το κύριο πλεονέκτημα ενός μαθησιακού περιβάλλοντος Δυναμικής Γεωμετρίας σε σχέση με άλλα (υπολογιστικά ή μη υπολογιστικά) περιβάλλοντα, είναι ότι οι μαθητές μπορούν να κατασκευάσουν πολύπλοκα σχήματα και εύκολα να εκτελέσουν, σε πραγματικό χρόνο, ένα μεγάλο εύρος μετατροπών πάνω στα σχήματα αυτά. Συνεπώς, οι μαθητές έχουν πρόσβαση σε μια μεγάλη ποικιλία παραδειγμάτων, η οποία δύσκολα μπορεί να συνδυαστεί με μη υπολογιστικά ή στατικά υπολογιστικά περιβάλλοντα (Marrades & Gutiérrez, ό.π., 95).

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3ο

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΕΣ ΣΤΟ ΠΕΡΙΒΑΛΛΟΝ GEOGEBRA ΜΕ ΒΑΣΗ ΤΗ ΘΕΩΡΙΑ ΤΩΝ VAN HIELE

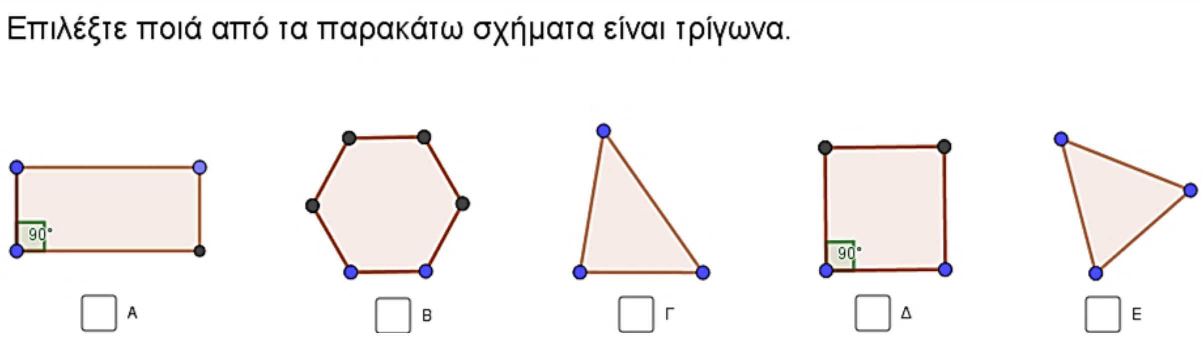
Στο κεφάλαιο αυτό παρουσιάζονται κάποιες δραστηριότητες σε περιβάλλον Geogebra, ταξινομημένες βάσει των επιπέδων της θεωρίας van Hiele. Παρατίθενται δραστηριότητες που υπάρχουν στην βιβλιογραφία, «μεταφρασμένες» στη γλώσσα του υπό μελέτη περιβάλλοντος Δυναμικής Γεωμετρίας καθώς και κάποιες δικές μου.

1ο Επίπεδο: Αναγνώριση ή Οπτικοποίηση

Γεωμετρικές δεξιότητες:

- Οπτικές
- Λεκτικές
- Σχεδίασης
- Λογικές
- Εφαρμογής

◦ ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 1:*



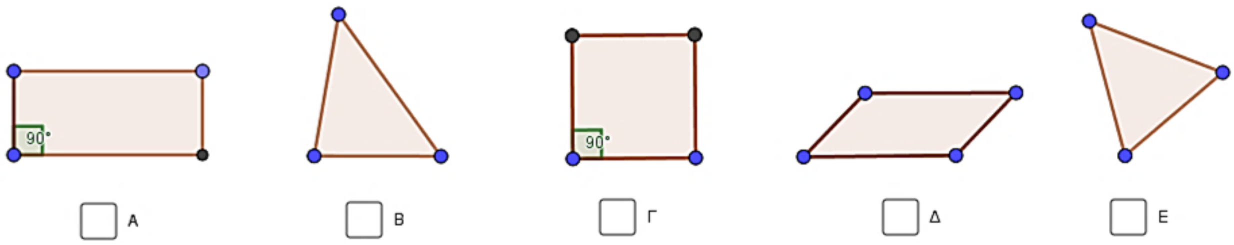
Link: http://dmlt.math.aegean.gr/geogebra-vanhiele.html#1

---

* Δραστηριότητα που έχει κατασκευαστεί από εμένα, Α. Θ.

◦ ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 2:*

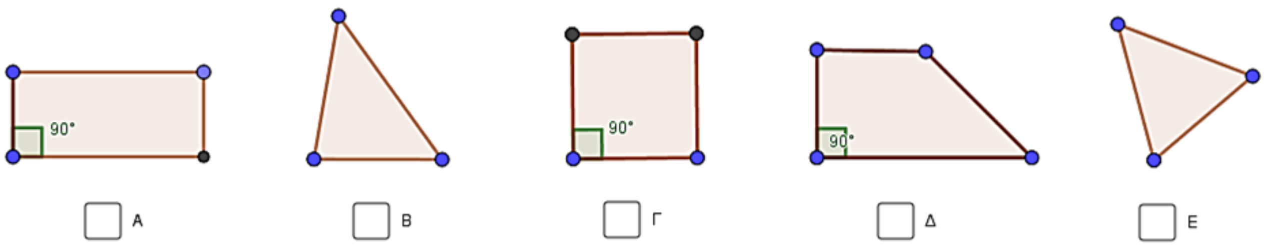
Επιλέξτε ποιά από τα παρακάτω σχήματα είναι τετράγωνα.



Link: http://dmlt.math.aegean.gr/geogebra-vanhiele.html#1

◦ ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 3:*

Επιλέξτε ποιά από τα παρακάτω σχήματα είναι ορθογώνια παραλληλόγραμμα.

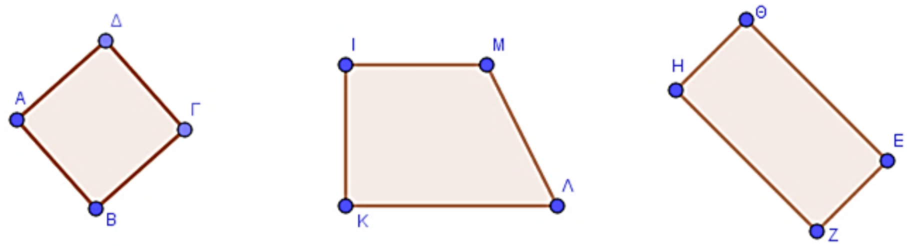


Link: http://dmlt.math.aegean.gr/geogebra-vanhiele.html#1

* Δραστηριότητα που έχει κατασκευαστεί από εμένα.

◦ ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 4:*

Ποιά από τα παρακάτω σχήματα είναι παραλληλόγραμμα;

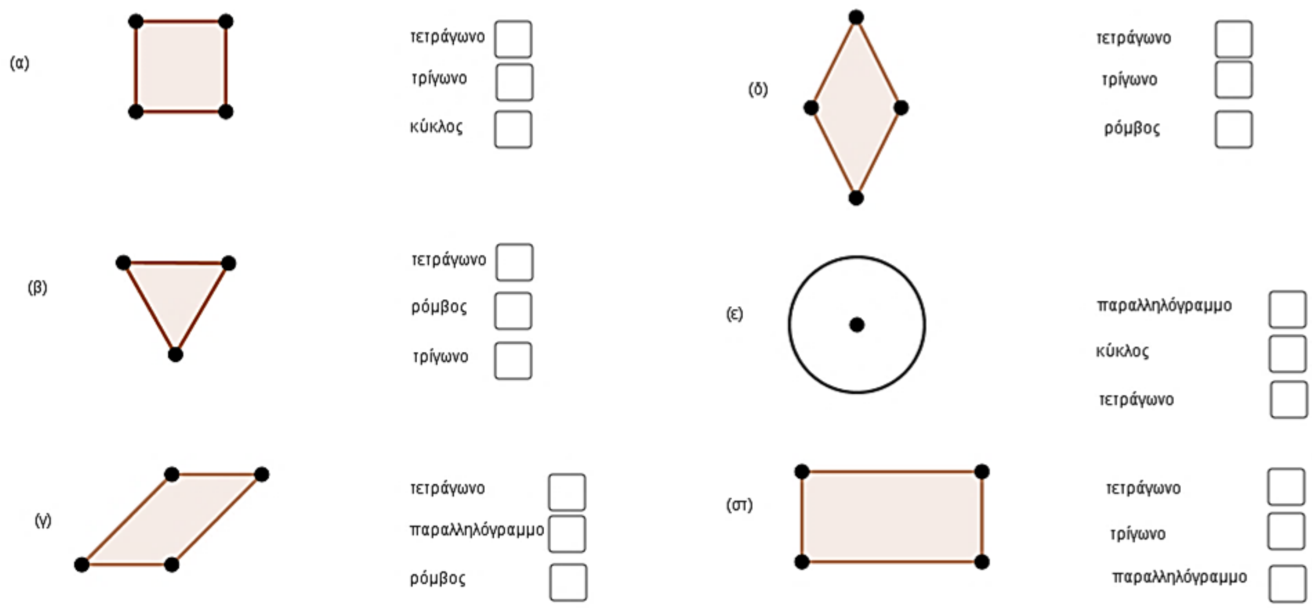


- ☐ Το ΑΒΓΔ μόνο.
- ☐ Το ΙΚΛΜ μόνο.
- ☐ Το ΘΕΖΗ μόνο
- ☐ Όλα είναι παραληλλόγραμμα.
- ☐ Κανένα δεν είναι παραληλλόγραμμο.
- ☐ Τα ΑΒΓΔ και ΘΕΖΗ είναι παραλληλόγραμμα.

Link: http://dmlt.math.aegean.gr/geogebra-vanhiele.html#1

◦ ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 5:*

Επιλέξτε τη σωστή απάντηση σχετικά με την ονομασία του κάθε σχήματος.



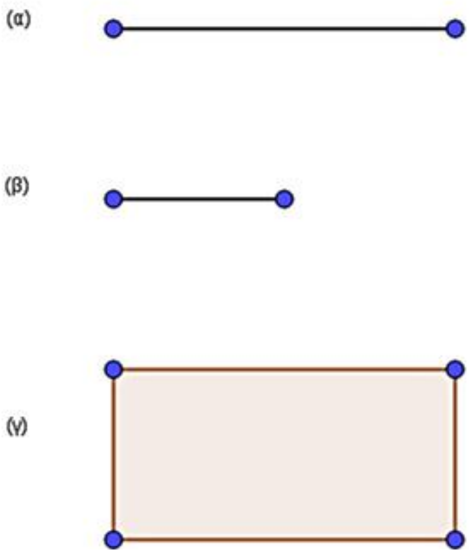
Link: http://dmlt.math.aegean.gr/geogebra-vanhiele.html#1

---

* Δραστηριότητα που έχει κατασκευαστεί από εμένα.

◦ ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 6:*

Χρησιμοποιώντας το εργαλείο "Απόσταση ή μήκος" μετρήστε τα μήκη των παρακάτω ευθύγραμμων τμημάτων καθώς και τα μήκη των πλευρών του ορθογωνίου παραλληλογράμμου:



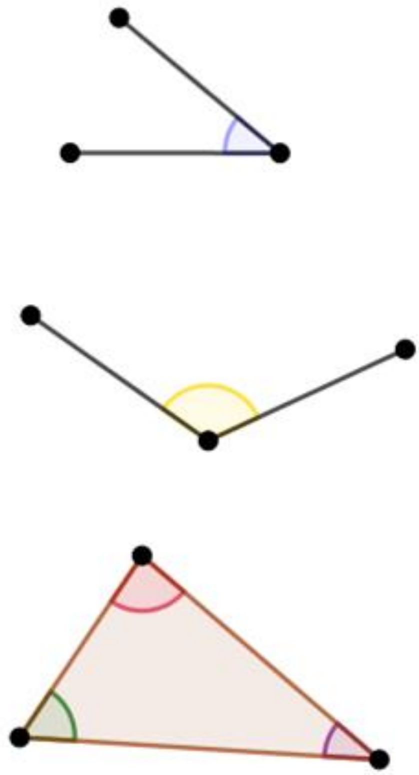
* Υπόδειξη: Για την εύρεση του μήκους, επιλέγετε το αντίστοιχο εργαλείο και στη συνέχεια τα δύο άκρα του ευθ. τμήματος, το μήκος του οποίου ψάχνετε.

Link: http://dmlt.math.aegean.gr/geogebra-vanhiele.html#1

* Δραστηριότητα που έχει κατασκευαστεί από εμένα.

◦ ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 7:*

Χρησιμοποιώντας το εργαλείο "γωνία", βρείτε το μέτρο των παραδίπλα γωνιών καθώς και όλων των γωνιών του τριγώνου.



* Υπόδειξη: Για την μέτρηση μιας γωνίας χρησιμοποιείτε το εργαλείο όπως σας υποδεικνύει το πρόγραμμα επιλέγοντας τις κορυφές με τη σειρά, ξεκινώντας από αυτή που βρίσκεται δεξία της γωνίας, της οποίας θέλετε να βρείτε το μέτρο.

Link: [*http://dmlt.math.aegean.gr/geogebra-vanhiele.html#1*](http://dmlt.math.aegean.gr/geogebra-vanhiele.html#1)

---

* Δραστηριότητα που έχει κατασκευαστεί από εμένα.

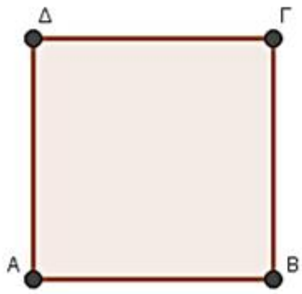
2ο Επίπεδο: Περιγραφή ή Ανάλυση Ιδιοτήτων

Γεωμετρικές δεξιότητες:

- Οπτικές
- Λεκτικές
- Σχεδίασης
- Λογικές
- Εφαρμογής

◦ ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 1:[20]

Το ΑΒΓΔ είναι ένα τετράγωνο. Ποιά από τις παρακάτω σχέσεις αληθεύει για όλα τα τετράγωνα;



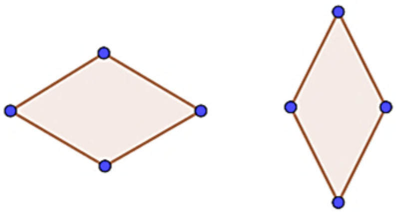
- ☐ Το ΔΒ και το ΑΒ έχουν το ίδιο μήκος.
- ☐ Το ΔΒ και το ΑΓ είναι μεταξύ τους κάθετα.
- ☐ Το ΔΑ και το ΓΒ είναι κάθετα.
- ☐ Το ΔΑ και το ΔΒ έχουν το ίδιο μήκος.
- ☐ Η γωνία Α είναι μεγαλύτερη από την γωνία Β.

Link: http://dmlt.math.aegean.gr/geogebra-vanhiele.html#2

[20] Σακονίδης, 2017, 132.

◦ ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 2:[21]

Ο ρόμβος είναι ένα τετράπλευρο με όλες τις πλευρές του ίσες. Στο παρακάτω σχήμα υπάρχουν 2 παραδείγματα. Ποιά-ες από τις παρακάτω προτάσεις αληθεύει-ουν για κάθε ρόμβο; Επιλέξτε τη σωστή απάντηση.

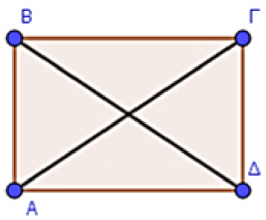


- ☐ Οι διαγώνιες έχουν το ίδιο μήκος.
- ☐ Κάθε διαγώνιος διχοτομεί δύο από τις γωνίες του ρόμβου.
- ☐ Οι δύο διαγώνιες είναι κάθετες.
- ☐ Οι απέναντι γωνίες έχουν το ίδιο μέτρο.
- ☐ Όλα τα πραπάνω.

Link: [*http://dmlt.math.aegean.gr/geogebra-vanhiele.html#2*](http://dmlt.math.aegean.gr/geogebra-vanhiele.html#2)

◦ ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 3:*

Στο ορθογώνιο ΑΒΓΔ οι ΒΔ και ΑΓ είναι διαγώνιες. Ποιά-ές από τις παρακάτω προτάσεις αληθεύει-ουν για κάθε ορθογώνιο; Επιλέξτε τη σωστή απάντηση.



- ☐ Υπάρχουν 4 πλευρές ίσες.
- ☐ Οι διαγώνιες έχουν το ίδιο μήκος.
- ☐ Οι απέναντι πλευρές έχουν το ίδιο μήκος.
- ☐ Υπάρχουν 4 ορθές γωνίες.
- ☐ Όλα τα παραπάνω είναι αληθή σε κάθε ορθογώνιο.

Link: [*http://dmlt.math.aegean.gr/geogebra-vanhiele.html#2*](http://dmlt.math.aegean.gr/geogebra-vanhiele.html#2)

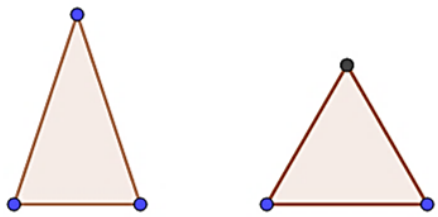
---

[21] Σακονίδης, ό.π., 133.

* Δραστηριότητα που έχει κατασκευαστεί από εμένα.

◦ ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 4:[22]

Ένα ισοσκελές τρίγωνο είναι ένα τρίγωνο με τουλάχιστον δύο πλευρές ίσες. Παρακάτω υπάρχουν 2 παραδείγματα. Ποιά από τις παρακάτω προτάσεις αληθεύει σε κάθε ισοσκελές τρίγωνο;

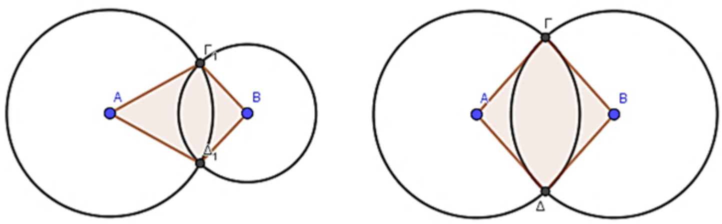


- ☐ Οι τρείς πλευρές πρέπει να έχουν το ίδιο μήκος.
- ☐ Μια πλευρά να είναι διπλάσια σε μήκος από κάποια άλλη.
- ☐ Πρέπει να υπάρχουν τουλάχιστον 2 γωνίες με το ίδιο μέτρο.
- ☐ Οι τρείς γωνίες πρέπει να έχουν το ίδιο μέτρο.
- ☐ Καμία από τις παραπάνω.

Link: http://dmlt.math.aegean.gr/geogebra-vanhiele.html#2

◦ ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 5:[23]

Δύο κύκλοι με κέντρα Α και Β τέμνονται στα σημεία Γ και Δ σχηματίζοντας το τετράπλευρο ΑΒΓΔ. Στο παρκάτω σχήμα υπάρχουν 2 παραδείγματα.
Ποιά-ές από τις παρακάτω προτάσεις αληθεύει-ουν πάντα;



- ☐ Το ΑΒΓΔ θα έχει δύο ζεύγη πλευρών ίσου μήκους.
- ☐ Το ΑΒΓΔ θα έχει τουλάχιστον δύο γωνίες ίσου μέτρου.
- ☐ Οι ευθείες ΑΒ και ΓΔ θα είναι κάθετες.
- ☐ Οι γωνίες Α και Β θα έχουν το ίδιο μέτρο.
- ☐ Όλα τα παραπάνω είναι αληθή.

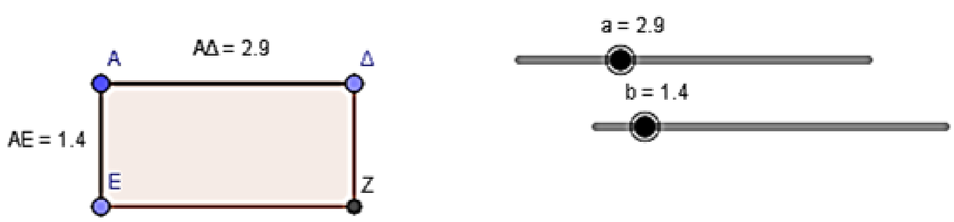
Link: http://dmlt.math.aegean.gr/geogebra-vanhiele.html#2

---

22 Senk, 1983, 312.
23 ό.π.

◦ ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 6:[24]

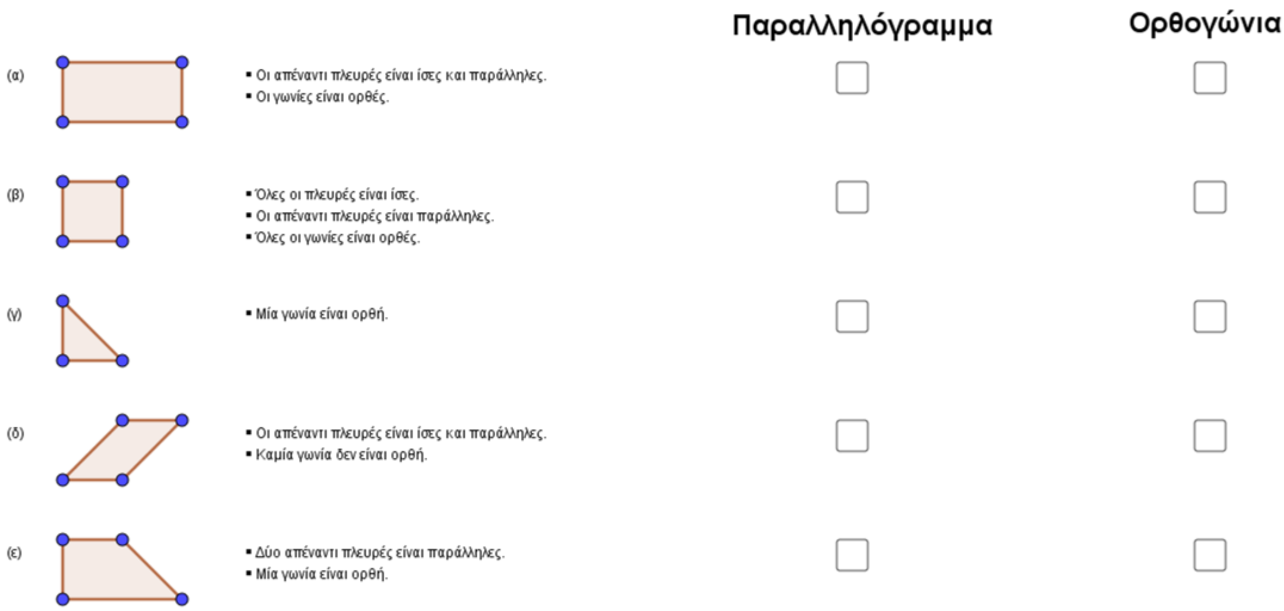
Χρησιμοποιώντας (σύροντας) τους παρακάτω δρομείς, κατασκευάστε ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο με:
(i) μήκος πλευρών 4 και 7 αντίστοιχα
(ii) μήκος πλευρών 5 και 5 αντίστοιχα



Link: http://dmlt.math.aegean.gr/geogebra-vanhiele.html#2

◦ ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 7:*

Με βάση τις ιδιότητες, επιλέξτε σε ποιά-ες ομάδα-ες ανήκουν τα παρακάτω σχήματα.



Link: http://dmlt.math.aegean.gr/geogebra-vanhiele.html#2

---

[24] Τουμάσης, 2000, 346.
* Δραστηριότητα που έχει κατασκευαστεί από εμένα.

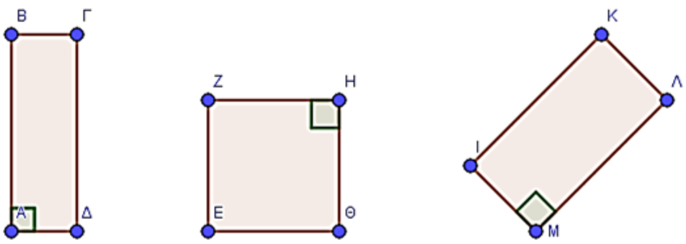
<u>3ο Επίπεδο: Σύνδεση ή μη-τυπική Παραγωγή</u>

Γεωμετρικές δεξιότητες:

- Οπτικές
- Λεκτικές
- Σχεδίασης
- Λογικές
- Εφαρμογής

◦ **ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 1:**[25]

Ποια από τα παρακάτω σχήματα ονομάζονται ορθογώνια;



- ☐ Όλα μπορούν.
- ☐ Μόνο το ΘΕΖΗ.
- ☐ Μόνο το ΙΚΛΜ.
- ☐ Τα ΑΒΓΔ και ΘΕΖΗ μόνο.
- ☐ Τα ΘΕΖΗ και ΙΚΛΜ μόνο.

Link: http://dmlt.math.aegean.gr/geogebra-vanhiele.html#3

---

25 Senk, ό.π, 313.

◦ **ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 2:**

Υπάρχουν 2 υποθέσεις. Ποιά είναι η σωστή;
Υπόθεση I: Το τρίγωνο ΑΒΓ έχει τρεις πλευρές με το ίδιο μήκος.
Υπόθεση II: Στο τρίγωνο ΑΒΓ, οι γωνίες Β και Γ έχουν το ίδιο μέτρο.

- [ ] Οι υποθέσεις I και II δεν μπορεί να είναι και οι δύο αληθείς.
- [ ] Αν η I είναι αληθής, τότε και η II είναι αληθής.
- [ ] Αν η II είναι αληθής, τότε και η I είναι αληθής.
- [ ] Αν η I είναι ψευδής, τότε και η II είναι ψευδής.
- [ ] Καμία από τις παραπάνω δεν είναι σωστή.

Link: *http://dmlt.math.aegean.gr/geogebra-vanhiele.html#3*

◦ **ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 3:**[26]

Ποια από τις παρακάτω προτάσεις είναι αληθής;

- [ ] Όλες οι ιδιότητες των ορθογωνίων παραλληλογράμμων είναι ιδιότητες των τετραγώνων.
- [ ] Όλες οι ιδιότητες των τετραγώνων είναι ιδιότητες των ορθογωνίων παραλληλογράμμων.
- [ ] Όλες οι ιδιότητες των ορθογωνίων παραλληλογράμμων είναι ιδιότητες των παραλληλογράμμων.
- [ ] Όλες οι ιδιότητες των τετραγώνων είναι ιδιότητες των παραλληλογράμμων.
- [ ] Καμία από τις παραπάνω δεν είναι σωστή.

Link: *http://dmlt.math.aegean.gr/geogebra-vanhiele.html#3*

[26] Σακονίδης, ό.π., 134.

◦ ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 4:[27]

Ποιες ιδιότητες έχουν τα ορθογώνια παραλληλόγραμμα που μερικά παραλληλόγραμμα δεν έχουν;

- ☐ Οι απέναντι πλευρές είναι ίσες.
- ☐ Οι διαγώνιες είναι ίσες.
- ☐ Οι απέναντι πλευρές είναι παράλληλες.
- ☐ Οι απέναντι γωνίες είναι ίσες.
- ☐ Καμία από τις παραπάνω.

Link: *http://dmlt.math.aegean.gr/geogebra-vanhiele.html#3*

◦ ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 5:

Υπάρχουν δύο υποθέσεις. Ποιά είναι η σωστή;
Υπόθεση I: Το σχήμα Φ είναι ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο.
Υπόθεση II: Το σχήμα Φ είναι ένα τρίγωνο.

- ☐ Αν η I είναι αληθής, τότε και η II είναι αληθής.
- ☐ Αν η I είναι ψευδής, τότε η II είναι αληθής.
- ☐ Οι I και II δεν μπορεί να είναι και οι δύο αληθείς.
- ☐ Οι I και II δεν μπορεί να είναι και οι δύο ψευδείς.
- ☐ Καμία από τις παραπάνω δεν είναι σωστή.

Link: *http://dmlt.math.aegean.gr/geogebra-vanhiele.html#3*

---

[27] Σακονίδης, ό.π., 135.

◦ ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 6:[28]

Επιλέξτε ποιες από τις παρακάτω προτάσεις είναι αληθείς.

- ☐ Κάθε ορθογώνιο παραλληλόγραμο είναι ένα τετράγωνο.
- ☐ Κάθε τετράγωνο είναι ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο.
- ☐ Εάν οι διαγώνιοι ενός παραλληλογράμμου είναι ίσοι, τότε το σχήμα είναι ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμο.

Link: http://dmlt.math.aegean.gr/geogebra-vanhiele.html#3

◦ ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 7:[29]

Επιλέξτε ποιες από τις παρακάτω προτάσεις αληθεύουν.

- ☐ Όλα τα ισοσκελή τρίγωνα είναι και ισόπλευρα.
- ☐ Όλα τα τραπέζια είναι παραλληλόγραμμα.
- ☐ Ο ρόμβος είναι ένα παραλληλόγραμμο.
- ☐ Όλα τα τετράπλευρα είναι παραλληλόγραμμα.
- ☐ Όλα τα τετράγωνα έχουν τις ιδιότητες του ρόμβου.

Link: http://dmlt.math.aegean.gr/geogebra-vanhiele.html#3

[28] Τουμάσης, ό.π., 348.
[29] Σακονίδης, ό.π., 135.

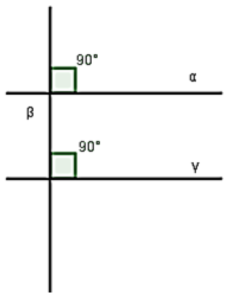
4ο Επίπεδο: Απόδειξη ή τυπική Παραγωγή

Γεωμετρικές δεξιότητες:

- Οπτικές
- Λεκτικές
- Σχεδίασης
- Λογικές
- Εφαρμογής

◦ ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 1:

Εξετάστε αυτές τις τρεις υποθέσεις.
Υπόθεση I: Δυο ευθείες κάθετες στην ίδια ευθεία είναι μεταξύ τους παράλληλες.
Υπόθεση II: Μια ευθεία που είναι κάθετη σε μια από δυο παράλληλες είναι κάθετη και στην άλλη.
Υπόθεση III: Εάν δυο ευθείες ισαπέχουν, τότε είναι παράλληλες.
Στο σχήμα που ακολουθεί δίνεται ότι οι ευθείες α και β είναι κάθετες και οι ευθείες β και γ είναι κάθετες. Ποιες από τις παραπάνω προτάσεις μπορεί να είναι ο λόγος που η ευθεία α είναι παράλληλη στην ευθεία γ;



- ☐ Η I μόνο.
- ☐ Η II μόνο.
- ☐ Η III μόνο.
- ☐ Είτε η I είτε η II.
- ☐ Είτε η II είτε η III.

Link: http://dmlt.math.aegean.gr/geogebra-vanhiele.html#4

◦ **ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 2:**

Παρακάτω υπάρχουν τρεις ιδιότητες ενός σχήματος.
Ιδιότητα Ι: Το σχήμα έχει διαγώνιες με ίσα μήκη.
Ιδιότητα ΙΙ: Το σχήμα είναι ένα τετράγωνο.
Ιδιότητα ΙΙΙ: Το σχήμα είναι ένα ορθογώνιο.
Επιλέξτε ποια από τις παρακάτω προτάσεις είναι αληθής.

- ☐ Η Ι συνεπάγεται την ΙΙ η οποία συνεπάγεται την ΙΙΙ.
- ☐ Η Ι συνεπάγεται την ΙΙΙ η οποία συνεπάγεται την ΙΙ.
- ☐ Η ΙΙ συνεπάγεται την ΙΙΙ η οποία συνεπάγεται την Ι.
- ☐ Η ΙΙΙ συνεπάγεται την Ι η οποία συνεπάγεται την ΙΙ.
- ☐ Η ΙΙΙ συνεπάγεται την ΙΙ η οποία συνεπάγεται την Ι.

Link: *http://dmlt.math.aegean.gr/geogebra-vanhiele.html#4*

◦ **ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 3:**[30]

Παρακάτω υπάρχουν δύο υποθέσεις.
Υπόθεση Ι: Εάν ένα τετράπλευρο σχήμα είναι ορθογώνιο, τότε οι διαγώνιοί του διχοτομούνται.
Υπόθεση ΙΙ: Εάν οι διαγώνιοι ενός τετράπλευρου σχήματος διχοτομούνται, τότε αυτό είναι ορθογώνιο.
Ποιά από τις παρακάτω προτάσεις είναι σωστή;

- ☐ Για να αποδείξεις οτι η Ι είναι σωστή, είναι αρκετό να αποδείξεις ότι η ΙΙ είναι σωστή.
- ☐ Για να αποδείξεις ότι η ΙΙ είναι σωστή, είναι αρκετό να αποδείξεις ότι η Ι είναι σωστή.
- ☐ Για να αποδείξεις ότι η ΙΙ είναι σωστή, είναι αρκετό να βρεις ένα ορθογώνιο του οποίου οι διαγώνιες να διχοτομούνται.
- ☐ Για να αποδείξεις ότι η ΙΙ είναι λάθος, είναι αρκετό να βρεις ένα μη ορθογώνιο του οποίου οι διαγώνιες να διχοτομούνται.
- ☐ Καμία από τις παραπάνω δεν είναι σωστή.

Link: *http://dmlt.math.aegean.gr/geogebra-vanhiele.html#4*

---

30 Senk, ό.π., 313.

ΕΠΙΛΟΓΟΣ

Στην παρούσα εργασία κάναμε μια σύνδεση ανάμεσα στη θεωρητική Ευκλείδεια Γεωμετρία και τα περιβάλλοντα Δυναμικής Γεωμετρίας. Το αντικείμενο της συγκεκριμένης εργασίας αποτελεί ένα πολύ ενδιαφέρον θέμα το οποίο θα μπορούσε να επεκταθεί και να αποτελέσει τη βάση για μελλοντική περαιτέρω έρευνα.

Η διαθέσιμη βιβλιογραφία σχετικά με δραστηριότητες ταξινομημένες κατά van Hiele, περιορίζεται στο σχεδιασμό εφαρμογών για μαθητές μέχρι το $4^{ο}$ Επίπεδο ενώ για το $5^{ο}$ Επίπεδο (που αφορά κυρίως φοιτητές), οι δραστηριότητες είναι ελάχιστες ή δεν υπάρχουν καθόλου. Θα μπορούσε λοιπόν κανείς να σχεδιάσει δραστηριότητες σύμφωνα με τα χαρακτηριστικά γεωμετρικής σκέψης των van Hiele, που να αφορούν το τελευταίο επίπεδο και θα απευθύνονται κυρίως σε φοιτητές. Ακόμη πιο ενδιαφέρον θα ήταν, οι δραστηριότητες αυτές να σχεδιαστούν αξιοποιώντας τις δυνατότητες που παρέχουν τα περιβάλλοντα Δυναμικής Γεωμετρίας.

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Στη συγκεκριμένη πτυχιακή εργασία ασχοληθήκαμε με τη διδασκαλία της Ευκλείδειας Γεωμετρίας. Προσεγγίσαμε το συγκεκριμένο θέμα συνδέοντας τη διδασκαλία της θεωρητικής Ευκλείδειας Γεωμετρίας και τη θεωρία των van Hiele για τα 5 στάδια ανάπτυξης της γεωμετρικής σκέψης των μαθητών, με τη Δυναμική Γεωμετρία, τα περιβάλλοντα Δυναμικής Γεωμετρίας και κυρίως με το λογισμικό Geogebra. Αντλώντας πληροφορίες από την ελληνική και ξένη βιβλιογραφία, ξεκινήσαμε από τα κυριότερα αίτια της δυσκολίας τόσο των μαθητών όσο και των εκπαιδευτικών στο μάθημα της Ευκλείδειας Γεωμετρίας. Μελετήσαμε τη μοναδική θεωρία μάθησης σχετική με τη Γεωμετρία, τη θεωρία των van Hiele και εν συνεχεία ασχοληθήκαμε διεξοδικά με τη Δυναμική Γεωμετρία και συγκεκριμένα με τα περιβάλλοντα Δυναμικής Γεωμετρίας. Επικεντρωθήκαμε κυρίως στις λειτουργίες του περιβάλλοντος Geogebra και αξιοποιώντας τις δυνατότητες και τις λειτουργίες του σχεδιάσαμε δραστηριότητες για καθένα από τα επίπεδα κατανόησης του μοντέλου van Hiele.

Πιο συγκεκριμένα, στο **1ο κεφάλαιο,** παρουσιάσαμε αναλυτικά τη θεωρία των van Hiele. Είδαμε πως η συγκεκριμένη θεωρία μάθησης γεννήθηκε ως αποτέλεσμα των προβληματισμών του ζεύγους van Hiele για τις δυσκολίες που αντιμετωπίζουν οι μαθητές στο μάθημα της Ευκλείδειας Γεωμετρίας, αλλά και τα 5 επίπεδα κατανόησης που περιλαμβάνει το μοντέλο των van Hiele σχετικά με τα στάδια ανάπτυξης της γεωμετρικής σκέψης των μαθητών. Τα επίπεδα αυτά είναι με αύξουσα σειρά: Αναγνώριση, Περιγραφή, Μη-τυπική παραγωγή, Τυπική παραγωγή, Αξιωματικοποίηση.

Στο 1ο επίπεδο (Αναγνώριση) ο μαθητής μπορεί να αναγνωρίζει και να κατονομάζει τα σχήματα με βάση την εξωτερική τους εμφάνιση ενώ δεν αντιλαμβάνεται γεωμετρικές ιδιότητες. Στο 2ο επίπεδο (Περιγραφή) ανακαλύπτει τις ιδιότητες των σχημάτων αλλά δεν μπορεί να κάνει συσχετισμούς μεταξύ των διαφόρων ιδιοτήτων. Στο 3ο επίπεδο (Μη-τυπική παραγωγή) ο μαθητής είναι σε θέση πλέον να κάνει συσχετισμούς μεταξύ των ιδιοτήτων των σχημάτων, ωστόσο δεν αντιλαμβάνεται την σπουδαιότητα της απόδειξης. Στο 4ο επίπεδο (Τυπική παραγωγή) μπορεί να κατασκευάσει πια και μόνος του αποδείξεις αξιοποιώντας ορισμούς, θεωρήματα, αναγκαίες και ικανές συνθήκες. Το 5ο και τελευταίο επίπεδο (Αξιωματικοποίηση) απευθύνεται κυρίως σε φοιτητές και αφορά ένα ακαδημαϊκό επίπεδο γνώσεων στο οποίο οι φοιτητές γνωρίζουν την ύπαρξη διαφορετικών αξιωματικών συστημάτων και μπορούν να κάνουν συγκρίσεις μεταξύ τους. Όλα τα επίπεδα αυτά είναι διαδοχικά

και κανένας μαθητής δεν μπορεί να περάσει σε μεγαλύτερο αν δεν έχει κατακτήσει πρώτα όλα τα προηγούμενα.

Ακολούθως αναφέραμε τις ιδιότητες και τα χαρακτηριστικά του συγκεκριμένου μοντέλου, δώσαμε πληροφορίες σχετικά με το πώς μπορεί να γίνει ο προσδιορισμός του επιπέδου των μαθητών σύμφωνα με τη θεωρία των van Hiele, αλλά και τις εφαρμογές της θεωρίας αυτής στη διδασκαλία.
Έπειτα, ασχοληθήκαμε με τις φάσεις μάθησης που αφορούν την οργάνωση της διδασκαλίας της Ευκλείδειας Γεωμετρίας και παρουσιάσαμε κάποιες βασικές γεωμετρικές δεξιότητες (Οπτικές, Λεκτικές, Σχεδιαστικές, Λογικές, Εφαρμογής) που αποκτούν οι μαθητές μέσα από μια ορθά προγραμματισμένη διδασκαλία. Σύμφωνα με τους van Hiele, οι μαθητές προχωρούν από το ένα επίπεδο στο επόμενο ύστερα από προγραμματισμένη διδασκαλία, οργανωμένη σε 5 φάσεις διαδοχικών δραστηριοτήτων οι οποίες με αύξουσα σειρά είναι: Πληροφορία, Κατευθυνόμενη εργασία, Επεξήγηση, Ελεύθερη εργασία, Ολοκλήρωση.

Στην 1^{η} φάση (Πληροφορία) οι μαθητές επιδίδονται στην αναζήτηση πληροφοριών σχετικά με την υπό μελέτη έννοια. Στη 2^{η} φάση (Κατευθυνόμενη εργασία) ο δάσκαλος είναι αυτός που κατευθύνει τον τρόπο εργασίας των μαθητών του ώστε να καταλήξουν στο επιθυμητό αποτέλεσμα. Στην 3^{η} φάση (Επεξήγηση), ο εκπαιδευτικός καλείται να απαντήσει στις ερωτήσεις και να λύσει τις απορίες των μαθητών του. Στην 4^{η} φάση (Ελεύθερη εργασία) οι μαθητές εξερευνούν τις δραστηριότητες ελεύθερα με τον δικό τους τρόπο και στην 5^{η} και τελευταία φάση (Ολοκλήρωση) η νέα γνώση συγκεντρώνεται και ενσωματώνεται στο σύνολο των διαθέσιμων γνώσεων.

Στη συνέχεια κάναμε μια σύνδεση της θεωρίας των van Hiele με την κατασκευή των γεωμετρικών αποδείξεων και γνωστοποιήσαμε πως το μοντέλο των van Hiele αναθεωρήθηκε από τους ίδιους τους van Hiele με αποτέλεσμα, πλέον, τα στάδια ανάπτυξης της γεωμετρικής σκέψης των μαθητών από πέντε (5) που ήταν αρχικά, έχουν επικρατήσει να είναι τρία (3). Συγκεκριμένα, για το αναθεωρημένο μοντέλο van Hiele είδαμε τα επίπεδα στα οποία χωρίζεται πλέον η γεωμετρική σκέψη των μαθητών (Οπτικό, Περιγραφικό, Θεωρητικό), τις περιόδους αλλά και τις φάσεις της μάθησης. Τελειώνοντας με το κεφάλαιο αυτό, τονίσαμε την παιδαγωγική αξία του μοντέλου των van Hiele για τη διδασκαλία της θεωρητικής Ευκλείδειας Γεωμετρίας.

Το **2^{ο} κεφάλαιο**, κάνει λόγο για την Δυναμική Γεωμετρία, τα περιβάλλοντα Δυναμικής Γεωμετρίας και κυρίως το λογισμικό Geogebra. Αρχικά, ασχοληθήκαμε με τα περιβάλλοντα μάθησης μέσω υπολογιστή. Είδαμε ποιος είναι ουσιαστικά ο ρόλος τους, ο τρόπος λειτουργίας τους, οι δυνατότητες που παρέχουν στο χρήστη αλλά και το πώς μπορούν να συνδεθούν με τη διδασκαλία των Μαθηματικών γενικότερα. Στη συνέχεια ορίσαμε την έννοια του μαθηματικού μικρόκοσμου και δώσαμε κάποια βασικά παραδείγματά του, που αφορούν τη Γεωμετρία. Μελετήσαμε τα περιβάλλοντα Δυναμικής Γεωμετρίας, τις λειτουργίες και τον ρόλο τους και κάναμε μια σύντομη ιστορική αναδρομή στα πρώτα περιβάλλοντα Δυναμικής Γεωμετρίας.

Για να μπορέσουμε να παρουσιάσουμε καλύτερα μια βασική λειτουργία των περιβαλλόντων Δυναμικής Γεωμετρίας, τη λειτουργία «σύρσιμο», κρίθηκε αναγκαία η διάκριση ανάμεσα στους όρους «σχέδιο» και «σχήμα». Αφού ξεκαθαρίσαμε πως ένα *σχέδιο* μπορεί να είναι φτιαγμένο με τέτοιο τρόπο ώστε να μοιάζει εμφανισιακά σωστό, ενώ ένα *σχήμα* συμπεριλαμβάνει και τις σχέσεις μεταξύ των γεωμετρικών αντικειμένων και είναι κατασκευασμένο ώστε να είναι αμετάβλητο, προχωρήσαμε στην περιγραφή της λειτουργίας «σύρσιμο». Αναφερθήκαμε στη σπουδαιότητά της, στους τρόπους με τους οποίους μπορεί να χρησιμοποιηθεί και συμπεράναμε πως σε ένα περιβάλλον Δυναμικής Γεωμετρίας, ο χρήστης μπορεί να κατασκευάσει οποιοδήποτε σχέδιο επιθυμεί. Αν το σχέδιο αυτό συρθεί και διατηρήσει αναλλοίωτα τα χαρακτηριστικά και τις ιδιότητες βάσει των οποίων κατασκευάστηκε, τότε μπορεί να θεωρηθεί σχήμα, αφού η δημιουργία του έχει βασιστεί σε κανόνες της Γεωμετρίας.

Στη συνέχεια, ασχοληθήκαμε με τις γεωμετρικές κατασκευές σε ένα περιβάλλον Δυναμικής Γεωμετρίας και τονίσαμε πως η βασική διαφορά της κατασκευής ενός γεωμετρικού σχήματος σε υπολογιστικό περιβάλλον σε σχέση με την αντίστοιχη κατασκευή με χαρτί και μολύβι, είναι πως η σειρά των βημάτων μιας κατασκευής σε ένα περιβάλλον Δυναμικής Γεωμετρίας παίζει πολύ σημαντικό ρόλο. Μάθαμε πως για την κατασκευή ενός περίπλοκου σχήματος, η διαδοχικότητα στην οργάνωση των βημάτων, δημιουργεί μια ιεραρχία από σχέσεις εξάρτησης, αφού κάθε μέρος της κατασκευής βασίζεται σε κάτι που έχει δημιουργηθεί νωρίτερα από αυτό.

Ακολούθως, είδαμε τον ρόλο της Δυναμικής Γεωμετρίας στην εκπαίδευση αλλά και τον αντίκτυπο της τεχνολογίας στη σύγχρονη μαθηματική εκπαίδευση. Φτάνοντας προς το τέλος του κεφαλαίου αυτού, παρουσιάσαμε λεπτομερώς το περιβάλλον Δυναμικής Γεωμετρίας Geogebra. Κάναμε μια ιστορική αναδρομή με την οποία μάθαμε πως γεννήθηκε η ιδέα ενός τέτοιου λογισμικού, ασχοληθήκαμε με τις δυνατότητες του συγκεκριμένου περιβάλλοντος αλλά και με τους τρόπους με τους οποίους μπορεί να αξιοποιηθεί το Geogebra στα σχολεία.

Στο **3ο και τελευταίο κεφάλαιο**, σχεδιάσαμε δραστηριότητες σε περιβάλλον Geogebra τις οποίες ταξινομήσαμε σύμφωνα με τα επίπεδα γεωμετρικής σκέψης της θεωρίας van Hiele. Παρουσιάσαμε δραστηριότητες που υπάρχουν στη βιβλιογραφία και εμείς τις «μεταφράσαμε» στη γλώσσα του περιβάλλοντος Geogebra αλλά και δραστηριότητες οι οποίες είναι σχεδιασμένες αποκλειστικά από εμένα. Στόχος των δραστηριοτήτων αυτών δεν είναι μόνο ο μαθητής του εκάστοτε επιπέδου να εξετάσει τις γνώσεις του, αλλά μέσα από τα λάθη του να μάθει τελικά και ποια ήταν η σωστή απάντηση. Με λίγα λόγια οι δραστηριότητες αυτές δεν στοχεύουν μόνο στο να ελέγξουν το επίπεδο της γεωμετρικής σκέψης του μαθητή αλλά και στο να τον διδάξουν.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Ελληνόγλωσση βιβλιογραφία

Πιπίνος, Γ. (2006). Διδακτική αξιοποίηση της θεωρίας των van Hiele. *Επιστημονικό Βήμα*, **5**, 66-83.

Σακονίδης, Χ., Παππά, Α., Καλαϊτζίδης, Π. (2017). Διερεύνηση των επιπέδων γεωμετρικής σκέψης των τελειόφοιτων μαθητών του Δημοτικού σχολείου και του Γυμνασίου κατά van Hiele. *Επιστήμες της Αγωγής*, **1**, 114-135.

Τουμάσης, Μπ. (2000). *Σύγχρονη Διδακτική των Μαθηματικών.* Αθήνα: Gutenberg.

Ξενόγλωσση βιβλιογραφία

Arzarello, F., Olivero, F., Domingo, P., Ornella, R. (2002). A cognitive analysis of dragging practices in Cabri environments. *Zentrallblatt für Didaktik der Mathematik*, **34 (3)**, 66-72.

Balacheff, N., & Kaput, J.J. (1996). Computer Based Learning Environments in Mathematics. *International Handbook of Mathematics Education*, **Vol. 4 (13)**, 469-501. Kluwer Academic Publishers.

◦ Hohenwarter, M., & Fuchs, K. (2004). Combination of dynamic geometry, algebra and calculus in the software system GeoGebra. Στο: *Proceedings of computer algebra systems and dynamic geometry systems in mathematics teaching conference, Pécs, Hungary*, 128-133.

Keith, J. (2000). Providing a foundation for deductive reasoning: Students' interpretations when using Dynamic Geometry software and their evolving mathematical explanations. *Educational Studies in Mathematics*, **44**, 55-85.

Mayberry, J. (1981). The van Hiele levels of geometric thought in undergraduate preservice teachers. *Journal for Research in Mathematics Education,* **14 (1)**, 58-69.

Marrades, R., & Gutiérrez, Á. (2000). Proofs produced by secondary school students learning geometry in a dynamic computer environment. *Educational Studies in Mathematics,* **44**, 87-125.

Morrow, J. (1997). Dynamic visualization from middle school through college. Στο: *Geometry Turned On: Dynamic Software in Learning, Teaching, and Research,* Mathematical Association of America.

Nagy, K. (2017). Spatial ability: Measurement and development. Στο: *Khine, Myint Swe (Ed.), Visual-spatial ability in STEM Education: Transforming research into practice*. Switzerland: Springer International Publishing.

Senk, S.L. (1989). Van Hiele levels and achievement in writing Geometry proofs. *Journal for Research in Mathematics Education,* **20 (3)**, 309-321.

Teppo, A. (1991). Van Hiele levels of Geometry thought revisited. *The Mathematics Teacher*, **84 (3)**, 210-221.

Van de Walle, J.A. (2007). *Διδάσκοντας Μαθηματικά για Δημοτικό και Γυμνάσιο. Μια αναπτυξιακή διαδικασία*. Σταφυλίδου Σ. (Επιμέλεια-Θεώρηση), Αράπογλου Β. (Μετάφραση). Θεσσαλονίκη: Εκδόσεις Επίκεντρο.